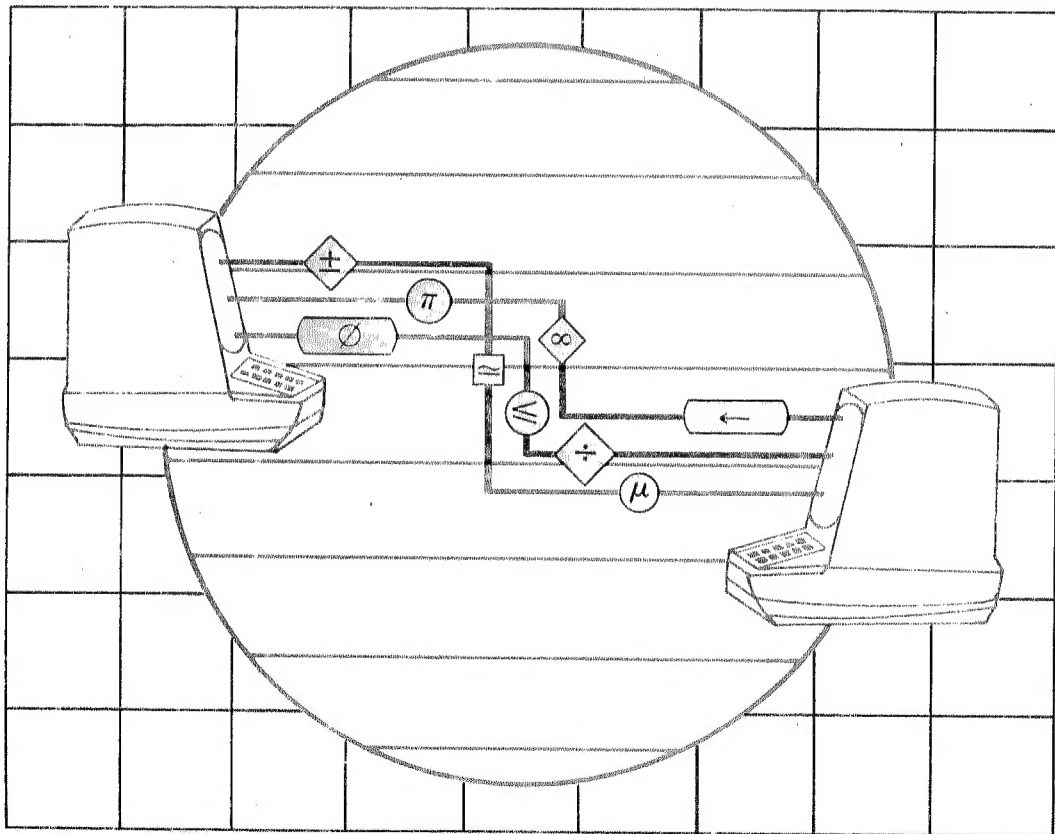


الإدارة العامة للبحوث

# الحاسب الآلي والتطبيقات الإحصائية



كرم الله على عبد الرحمن

محمد عثمان البشير





الإدارة العامة للبحوث

# الحاسب الآلي والنظميات الإحصائية بلغية بيسا

كرم الله على عبد الرحمن

محمد عثمان البشير

معهد الإدارة العامة

١٩٩٠ هـ - ١٩٩٠ م

«حقوق الطبع والنشر محفوظة لمعهد الادارة العامة ولا يجوز إقتباس جزء من هذا الكتاب أو إعادة  
طبعه بأية صورة دون موافقة كتابية من إدارة البحوث إلا في حالات الاقتباس القصيرة بغرض  
النقد والتحليل مع وجوب ذكر المصدر»



## المقدمة

العلاقة بين الحاسب الآلى والإحصاء ليست فى حاجة لتوضيح ، فهى خاصة ودقيقة . فالإحصاء مجال تطرح فيه مسائل كثيرة ومعقدة ، والمبرمجون يلعبون دوراً أساسياً فى حل تلك المسائل ، ومن هنا لعب الحاسب دوراً كبيراً فى تطور أساليب التحليل الإحصائى ودقتها . كذلك أصبح للإحصاء فضل كبير فى تطور البرمجة ؛ لتمييزه بوفرة البيانات التى تحتاج للمعالجة وفق أسس معلومة ، مما جعل كلاً منهما مكملًا للآخر خاصة فى مجالات التعليم ، والتدريب ، والبحوث ، فأنشئت المؤسسات المتخصصة فى إعداد البرامج (الحقائب) الإحصائية وتنافست فى تقنية التحليل الإحصائى .

لقد جاء هذا الكتاب لتعزيز تلك المفاهيم بين الباحثين والدارسين العرب ، ولا يحتاج القارئ لمتابعته إلى غير الإلمام بمبادئ الجبر . وهو يتكون من أحد عشر فصلاً .

موضوع **الفصل الأول** هو «حل مسألة بواسطة الكمبيوتر» بصفة عامة ، أما **الفصل الثانى** فقد تخصص فى لغة البيسك المستخدمة فى بقية الفصول . ويبدأ التداخل بين البرمجة والإحصاء فى **الفصل الثالث** الذى تناول مناهيم تبويب البيانات الإحصائية ، ووصفها إحصائياً ، وبعد حل بعض الأمثلة يدوياً استخدمت لغة البيسك لحل نفس الأمثلة ، وهكذا اتبع هذا الأسلوب فى بقية الفصول ، إذ نبدأ بتوضيح المفاهيم الإحصائية ومجالات التطبيقات الخاصة بها ، وبعد حل بعض التمارين يدوياً يأتى دور البرمجة بلغة بيسك لحل نفس التمارين ؛ لكى يكون القارئ قادراً على استخدام الأساليب الإحصائية السليمة وتحليل بياناته بواسطة الحاسب الآلى مستخدماً لغة البيسك .

اختص **الفصل الرابع** بمقاييس النزعة المركزية، وتلاه **الفصل الخامس** لمقاييس التشتت والعزوم. أما **الفصل السادس** فهو الخاص بأهم التوزيعات الإحصائية، ويميل كثيراً لشرح بعض النظريات ليعطى تفسيراً للإحصائيات المستخدمة في جميع الفصول التالية. هذا ويمكن للباحث عدم التعرض لهذا الفصل إن لم يكن في حاجة لتلك التفسيرات.

أما **الفصل السابع** فقد عالج موضوع حدود وفترات الثقة، وجاء **الفصل الثامن** مكتملاً له بموضوع التطبيقات الخاصة باختبارات الفرضيات المعلمية. هذا ولقد اتضحت لنا بواسطة بعض الزملاء الباحثين في المجالات الاجتماعية والإدارية أهمية التركيز على الاختبارات اللامعلمية؛ لذلك فقد أفردنا **الفصل التاسع** كاملاً لهذا الموضوع، مع توضيح مجال استخدام كل أسلوب. كذلك اتبعنا نفس الأسلوب في **الفصل العاشر** عندما تعرضنا لأكثر أنواع الارتباط استخداماً. وأخيراً جاء موضوع الانحدار الخطي في **الفصل الحادي عشر** لاعتماده على الارتباط.

لقد كان جل همنا هو ربط المواضيع، مع عدم إلزام القارئ بمتابعة ما لا يحتاج إليه سواء في مجال البرمجة أو الإحصاء، مراعين تنوع حاجات المستفيدين. لذلك فقد قسمنا الجداول الإحصائية إلى ثلاثة أنواع: النوع الأول يخص موضوعاً بعينه، ولذلك جاء مع ذلك الموضوع. أما النوع الثاني فيستخدم في أكثر من موضوع في فصل واحد، فجاء في مؤخرة ذلك الفصل. أما النوع الثالث فيستخدم في أكثر من فصل، ولذلك جاء في الملاحق بنهاية الكتاب.

وختاماً يجب ألا تفوتنا هذه الفرصة لتقديم شكرنا للكثير من الزملاء الذين أبدوا ملاحظات قيمة ومفيدة حول بعض مواد الكتاب.

**المؤلفان**

## المحتويات

### صفحة

٩	<b>الفصل الأول : خطوات ووسائل حل مسألة بواسطة الكمبيوتر</b>
١١	١ - مقدمة
١١	٢ - لغات البرمجة
١٢	٣ - الخوارزميات
١٢	٤ - خريطة سير العمليات
١٦	٥ - أنماط خرائط سير العمليات
٢٢	٦ - شبه الجفرة
٢٦	٧ - خوارزميات أساسية
٣١	<b>الفصل الثاني : مقدمة في لغة بيسك</b>
٣٣	١ - مدخل
٣٤	٢ - المكونات الأساسية لبرنامج بيسك
٣٨	٣ - العمليات الحسابية
٤٠	٤ - أوامر الإدخال
٤٢	٥ - نقل التسلسل والمقارنة
٤٥	٦ - الدوارة
٤٨	٧ - التنسيق والمصفوفات
٥٢	٨ - الدوال
٥٣	٩ - دوال المبرمج
٥٤	١٠ - عبارات إخراج متقدمة
٥٨	١١ - البرامج الفرعية
٦١	تمارين
٦٩	<b>الفصل الثالث : التحولات التكرارية لبيانات العينة</b>
٧١	١ - المقدمة
٧٢	٢ - أنواع البيانات
٧٣	٣ - تبويب البيانات الوصفية البسيطة
٧٦	٤ - تبويب البيانات الكمية
٨٥	٥ - التجمع التكرارى
٨٩	٦ - العرض البيانى
٩٤	تمارين

## صفحة

### الفصل الرابع : مقاييس النزعة المركزية

٩٩	
١٠١	١ - الإحصائية
١٠٢	٢ - الوسط الحسابي
١١٤	٣ - الوسيط
١١٩	٤ - خصائص الوسيط واستخداماته
١٢٠	٥ - المنوال
١٢٣	٦ - خصائص المنوال واستخداماته
١٢٤	٧ - العلاقة بين الوسط والوسيط والمنوال
١٢٥	٨ - الوسط الهندسي
١٢٩	٩ - خصائص الوسط الهندسي واستخداماته
١٣٠	١٠ - الوسط التوافقي
١٣٥	١١ - خصائص الوسط التوافقي واستخداماته
١٣٦	١٢ - الربيعات والعشيرات والمئينيات
١٤٣	تمارين

### الفصل الخامس : مقاييس التشتت والعزوم

١٤٧	
١٤٩	١ - المقدمة
١٥٠	٢ - المدى
١٥٠	٣ - الانحراف الربيعي
١٥٥	٤ - الانحراف المتوسط
١٥٧	٥ - الانحراف المعياري
١٦٤	٦ - الانحراف المعياري والمقارنات
١٧١	٧ - العزوم
١٧٤	٨ - الالتواء
١٨٣	٩ - التفرطح
١٩١	تمارين

### الفصل السادس : أهم التوزيعات الاحتمالية

١٩٥	
١٩٧	١ - المتغير العشوائي
١٩٨	٢ - التوزيع الطبيعي
٢٠٠	٣ - التوزيع ذو الحدين
٢٠٣	٤ - توزيع مربع كاي
٢٠٩	٥ - توزيع ف
٢١١	٦ - توزيع ت

## محتوى

٢١٣	٧ - توزيع الوسط الحسابى للعينة
٢٢٠	٨ - توزيع مجموع الوسطين أو الفرق بينهما
٢٢٣	٩ - توزيع نسبة المجتمع
٢٢٧	تمارين

## الفصل السابع : فترات الثقة

٢٢٩	١ - الاستدلال الإحصائى
٢٣١	٢ - فترات الثقة للأوساط
٢٣٢	٣ - فترة الثقة للفرق بين وسطين
٢٣٩	٤ - حدود الثقة للنسب
٢٤٤	٥ - فترات الثقة للتباينات
٢٤٨	تمارين
٢٤٩	

## الفصل الثامن : تطبيقات الاختبارات الفرضيات

٢٥١	١ - تعريف الفرضية والاختبار
٢٥٣	٢ - القرار
٢٥٨	٣ - اختبارات الوسط الحسابى لعينة واحدة
٢٦٠	٤ - اختبارات الفرق بين وسطين من عيتين مستقلتين
٢٦٥	٥ - اختبار الفرق بين وسطين لأزواج متشابهة أو لعينة واحدة
٢٧٢	٦ - اختبار الفرق لأكثر من وسطين
٢٧٥	٧ - اختبارات النسب
٢٧٥	٨ - اختبارات التباين
٢٨٣	تمارين
٢٩٠	

## الفصل التاسع : تطبيقات الاختبارات غير المعلمية على البيانات الاسمية والتسلسلية

٢٩٥	١ - الفرق بين الاختبارات المعلمية واللامعلمية
٢٩٧	٢ - اختبارات البيانات الاسمية
٢٩٨	٣ - اختبارات البيانات التسلسلية
٣١١	٤ - اختبارات الاستقلال بجداول التوافق
٣٤٤	٥ - تمارين
٣٥٣	

## صفحة

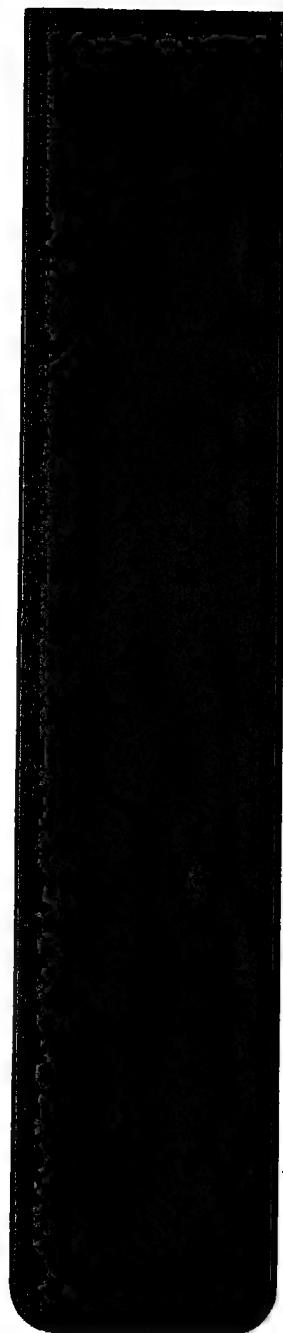
٣٥٩	<b>الفصل العاشر : الارتباط</b>
٣٦١	١ - التغيرات
٣٦٨	٢ - معامل الارتباط الخطي للبيانات النسبية
٣٧٢	٣ - معنوية الارتباط
٣٧٦	٤ - اختبار الفرق بين ارتباطين لعيتين
٣٧٨	٥ - معامل ارتباط الرتب لمتغيرين تسلسليين
٣٨١	٦ - الارتباط الجزئي
٣٨٣	٧ - الارتباط الثنائي التسلسل
٣٩٠	٨ - معامل الارتباط الرباعي للتقسيم الاصطناعي
٣٩١	٩ - الارتباط بين المتغيرات الاسمية
٣٩٥	تمارين

٣٩٩	<b>الفصل الحادي عشر : الانحدار الخطي</b>
٤٠١	١ - مفهوم الانحدار
٤٠٢	٢ - معادلة الانحدار الخطي البسيط
٤٠٨	٣ - خصائص معادلة الانحدار الخطي البسيط
٤١٣	٤ - انحرافات التقديرات
٤١٤	٥ - الانحدار الثنائي
٤١٧	٦ - الانحدار بالمصفوفات
٤٤٩	تمارين
٤٥٧	الملاحق (الجداول الإحصائية)
٤٧٩	المراجع

---

**خطوات ووسائل حل  
مسألة بواسطة الكمبيوتر**

---

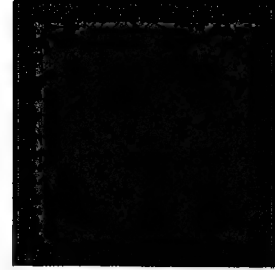






## خطوات ووسائل حل مسألة بواسطة الكمبيوتر

---



### ١ - مقدمة :

حل أى مسألة بواسطة الكمبيوتر لا بد من استخدام برنامج ما، سواء أكان هذا البرنامج جاهزاً ومعداً من قبل، أو كان عليك أن تكتبه بنفسك. والبرنامج هو سلسلة من الأوامر والتعليقات المرتبطة منطقياً والمكتوبة بإحدى لغات البرمجة، والتي توجه الكمبيوتر ليؤدي مهام معينة ويصل إلى نتائج محددة.

### ٢ - لغات البرمجة :

كما أسلفنا الذكر فإن البرنامج يكتب بإحدى لغات البرمجة، فما هى هذه اللغات؟ قبل الخوض فى ماهية لغات البرمجة دعنا نتعرف على بعض الحقائق الخاصة بالتفاهم بين الإنسان والكمبيوتر. ونبدأ بتقرير حقيقة هامة وهى أن الكمبيوتر لا يفهم إلا لغة الأرقام، وعليه فكل أجهزة الكمبيوتر الأولى كانت تستخدم ما يعرف بلغات الآلة MACHINE CODE ثم تطورت استخدامات الكمبيوتر وتشعبت، وأصبحت الحاجة ماسة لكتابة العديد من البرامج لقطاع واسع من التطبيقات، فكان لا بد من استنباط لغات أكثر سهولة من لغات الآلة، فكان أن ظهرت لغات المجمع ASSEMBLY والتي لم تحل إلا القليل من مشاكل لغات الآلة. بعد ذلك ظهرت لغات المستوى العالى HIGH LEVEL LANGUAGES والمستخدمه حالياً فى الغالبية العظمى من تطبيقات الكمبيوتر.

«لغات المستوى العالى» أطلق عليها هذا الاسم للتفريق بينها وبين لغات الآلة ولغات المجمع، والتي تعرف بلغات المستوى البسيط LOW LEVEL LANGUAGES. وقد سميت بهذا الاسم لقرابها من مستوى الآلة، إذ لكل جهاز كمبيوتر لغة الآلة الخاصة به، وهى مرتبطة بتكوين الدوائر المنطقية الداخلية للجهاز.

لغات المستوى العالى صممت بحيث تكون سهلة فى التعلم للإسراع فى كتابة البرامج وتعديلها متى ما تطلب الأمر؛ لذلك فهى تكتب بطريقة تشبه إلى حد كبير الكلام الإنجليزى العادى. وهناك العديد من هذه اللغات إلا أن أكثرها استخداماً هى :

BASIC	بيسك
COBOL	كوبول
FORTRAN	فورتران
ALGOL	ألجول
PASCAL	ناسكال
PL/1	ب ل ١

### ٣ = الخوارزميات <sup>(١)</sup> : ALGORITHMS

قد تكون عملية كتابة برنامج ما عملية سهلة، ولا تحتاج لكثير من الجهد، إذا كانت المسألة المراد حلها بسيطة وسهلة. أما إذا كانت المسألة معقدة بعض الشيء، فإن هذه العملية تستغرق الكثير من الوقت، وتتطلب جهداً إضافياً؛ لذلك كان لا بد من إيجاد وسائل للمساعدة فى كتابة البرامج. هذه الوسائل تؤدي إلى تفتيت المسألة إلى عناصر أولية، وإلى خطوات منطقية تجعل من السهولة كتابة البرنامج. هذه الخطوات المنطقية تعرف بالخوارزميات. إذاً فالخوارزمية ما هى إلا خطوات منطقية لحل مسألة ما.

يمكن التعبير عن الخوارزمية بعدة وسائل، وسنتطرق هنا إلى اثنتين من هذه الوسائل وهما :

FLOWCHART	- خريطة سير العمليات
PSEUDOCODE	- شبه الشفرة

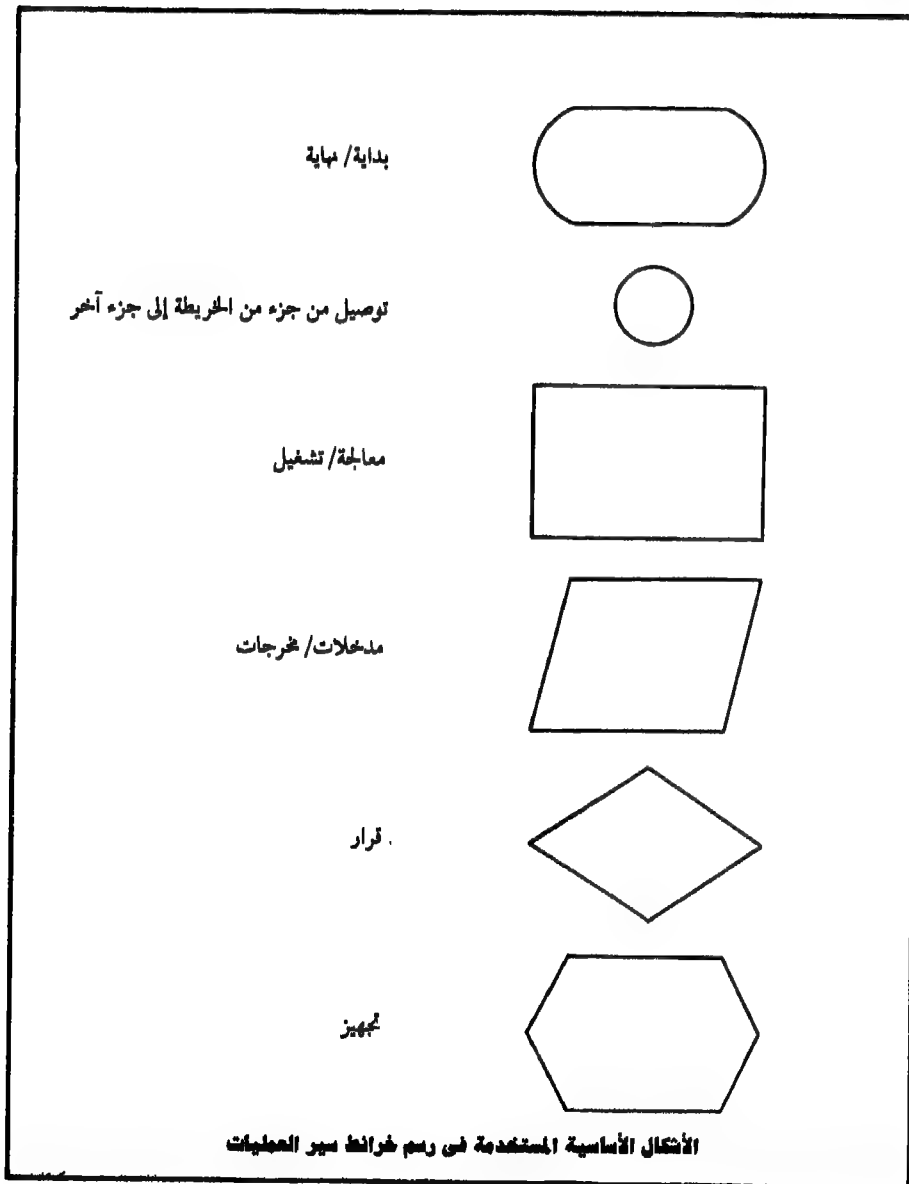
### ٤ = خريطة سير العمليات :

خريطة سير العمليات هى رسم بيانى تخطيطى للخطوات التى ينبغى للحاسب أن يتبعها لحل أى مسألة. وتستخدم بعض الأشكال لرسم هذه الخرائط، وهناك العديد من هذه الأشكال قد تختلف من مؤسسة لأخرى. وقد جرت عدة محاولات لتوحيد هذه الأشكال

---

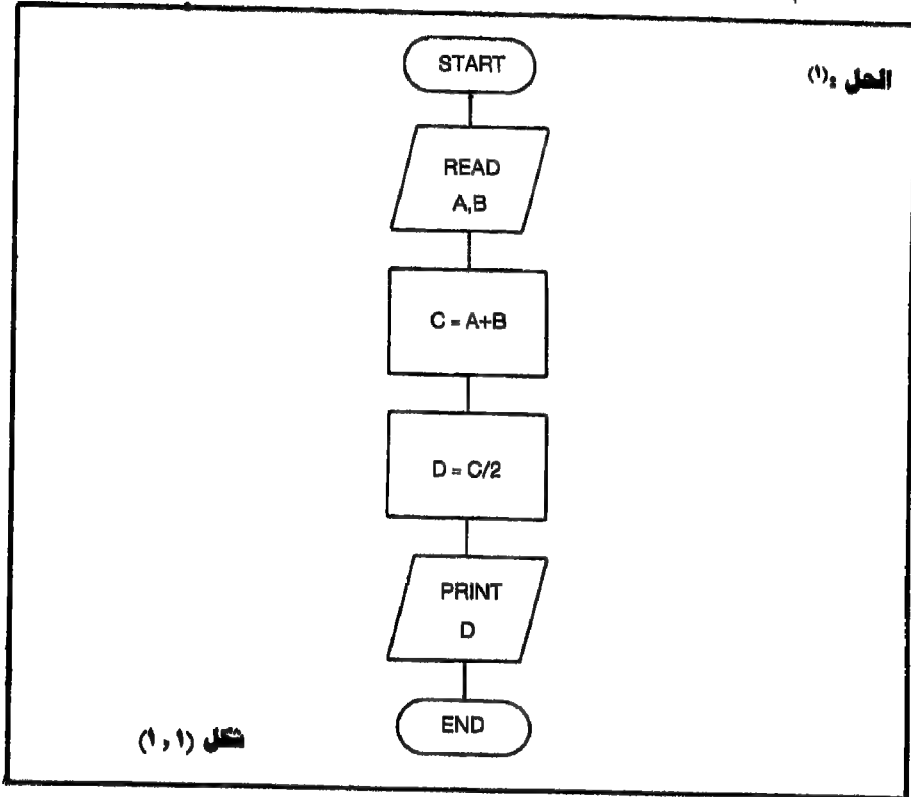
(١) نسبة إلى عالم الرياضيات الإسلامى أبى جعفر محمد بن موسى الخوارزمى.

والرموز، من هذه المحاولات ما قام به المعهد الأمريكى الوطنى للمواصفات والمقاييس الذى  
تبني الأشكال التالية :



دعنا الآن نأخذ بعض الأمثلة :

**مثال ١ :** ارسم خريطة سير عمليات لقراءة رقمين وطباعة الوسط الحسابي لهما.



الشكل (١,١) يمثل أبسط أنواع خرائط سير العمليات، وهو النوع الذى ينساب من أعلى إلى أسفل بدون أى تحويلات فى مساره. وهذا بطبيعة الحال مثال غير عملى إذ قد لا تحتاج المسألة من هذا النوع إلى برنامج كمبيوتر لحلها، إلا أن هنالك ملاحظات ينبغى ذكرها:

- ١ - كل خرائط سير العمليات تبدأ بـ (بداية START) وتنتهى بـ (نهاية END).
- ٢ - انسياب الخريطة يكون من أعلى إلى أسفل، ما لم تعترضه تحويلات تغير مساره، كما سنرى فيما بعد.

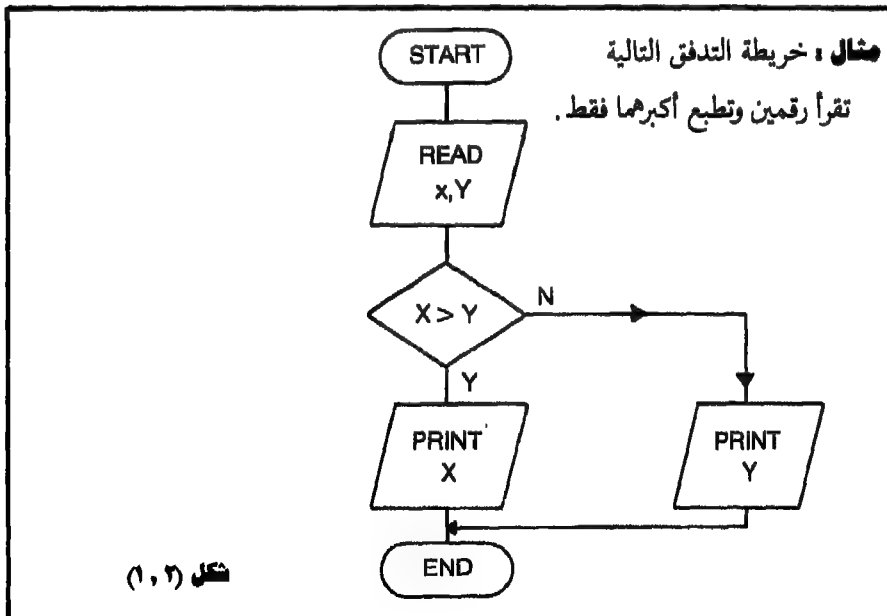
(١) استخدمنا اللغة الإنجليزية فى رسم خرائط العمليات لعدة اعتبارات أهمها تسهيل كتابة البرنامج مباشرة من الخريطة إلى لغة بيك.

٣ - كل خطوة (شكل) من خطوات الخريطة ينبغي أن تكون متصلة من جانبيين، لتوضيح الخطوة السابقة عليها والخطوة التي تليها. (ما عدا بالطبع البداية والنهاية).

### تحويل المسار BRANCHING :

هذا النمط من خرائط سير العمليات يختلف عن الأول في أن انسيابه يتحول في مرحلة من المراحل إلى أحد المسارات أو الآخر، اعتماداً على نتيجة قرار معين، لذلك فهو يستخدم شكل القرار DECISION ، والذي يكون نتيجته نعم أو لا . وهنا تستخدم الرموز والإشارات التي تختبر العلاقة بين قيمتين RELATIONAL والتي نوردتها فيما يلي :

الرمز	معناها
=	يساوي
>	أكبر من
<	أصغر من
>=	أكبر من أو يساوي
<=	أصغر من أو يساوي
<>	لا يساوي



## الدورة LOOP :

المثال (١، ١) كان يمثل خريطة سير عمليات لقراءة رقمين فقط، واستخراج وطباعة الوسط الحسابي لهما. وكما ذكرنا فإن ذلك المثال ليس بعمل، فأنت دائماً تستخدم الكمبيوتر لحل المسائل المعقدة الكبيرة، والتي تحتاج لعمليات كثيرة ومتكررة. فمثلاً إذا أردنا أن نوجد المتوسط الحسابي لدرجات ٣٠ طالباً في امتحان معين، فسيكون من العسير إعطاء كل درجة من هذه الدرجات رمزاً مثل A, B, C... وستكون المسألة أكثر عسراً إذا زاد عدد الدرجات أكثر. هنا نستغل خاصية مفيدة جداً من خصائص الكمبيوتر، وهي قدرته على تكرار عملية معينة أو مجموعة عمليات، أى عدد من المرات، ويسمى هذا التكرار بالدورة.

**مثال :** المثال التالي - الشكل ١، ٣ - يقوم بقراءة درجات ٣٠ طالباً في امتحان معين واحتساب متوسط الدرجات وطابعته.

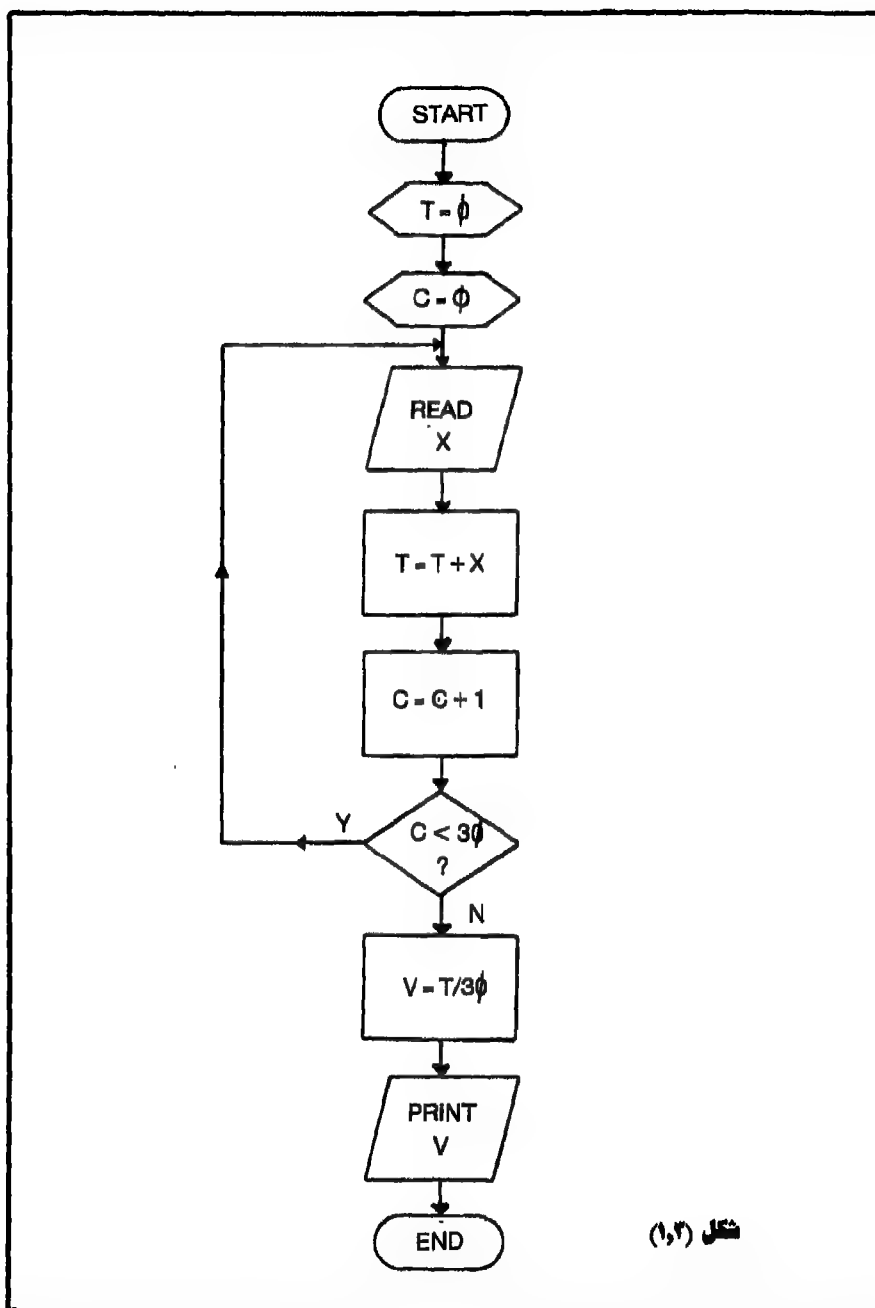
لاحظ الآتي في هذا المثال :

- استخدمنا رمز التهيئة لتنظيف حقل المجموع T والعداد C وذلك بوضع القيمة صفر فيها كقيمة ابتدائية، إذ أننا استخدمنا الأول لعملية الجمع التراكمي للدرجات، والثاني لعد الدرجات نفسها حتى نحدد نهاية الدورة.
- استخدمنا متغيراً واحداً هو X قرأنا فيه كل القيم، وهو بهذا يأخذ قيمة متغيرة في كل دورة. وفي كل دورة فإننا نضيف قيمة X إلى المجموع السابق T ونضيف 1 إلى العداد C.
- لتحديد نهاية الدورة فقد استخدمنا رمز القرار لمعرفة إذا كانت الأرقام كلها قد قرئت، إذ أننا نسأل إذا كان العداد C أقل من ٣٠ - وهي قيمته النهائية - فإن كانت الإجابة بلا فإننا نرجع لبداية الدورة، وإلا فإننا نحسب الوسط الحسابي ونطبعه ونهتئ الخريطة.

## ٥ - أنماط خرائط سير العمليات :

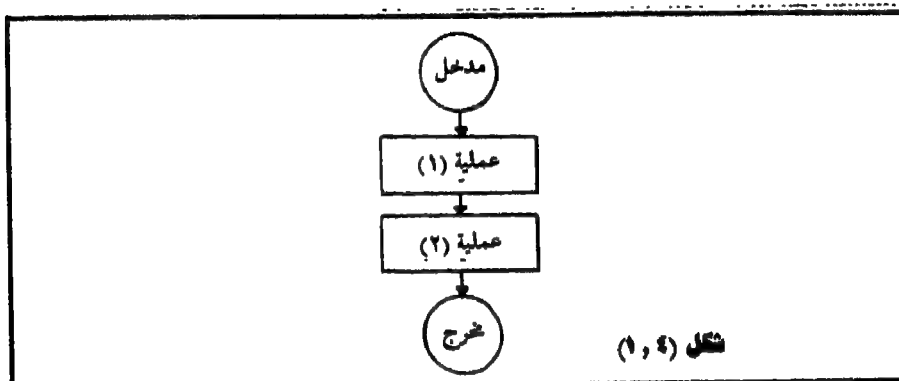
كما عرضنا آنفاً فهناك عدة طرق لتمثيل الخوارزميات عن طريق خرائط سير العمليات، إلا أن المتحمسين للطرق الحديثة في البرمجة يقررون أن أى خوارزمية يمكن تمثيلها بإحدى الطرق الثلاث التالية :

- ١ - منطق تسلسلي SEQUENCE
- ٢ - منطق اختيار SELECTION
- ٣ - منطق تكرار ITERATION



## ١- المنطق التسلسلي :

وهو الذى يتم فيه تنفيذ العمليات حسب ترتيبها من أعلى إلى أسفل، دون أن تعترضه شروط أو قرارات تغير مساره ويتخذ الشكل التالى :

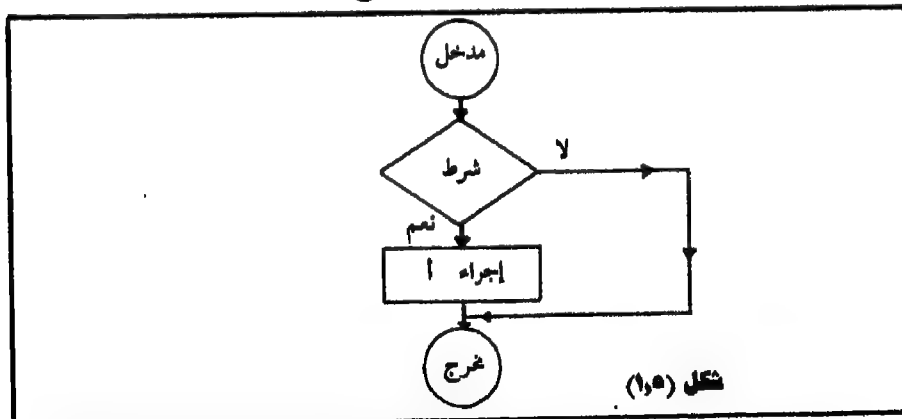


## ٢- منطق الاختيار :

وهذا يختلف عن سابقه فى أن هنالك شرطاً معيناً وكنتيجه لهذا الشرط يتغير المسار وهو يستخدم (إذا) الشرطية أو IF وله نوعان أساسيان :

### ١- مفرد البديل SINGLE ALTERNATIVE :

حيث يكون هنالك شرط، فإن تحقق نفذ إجراء معين (والذى قد يحتوى على عدة خطوات)، وإن لم يتحقق لا ينفذ ذلك الإجراء. ويوضح الشكل ١، ٥ ذلك.

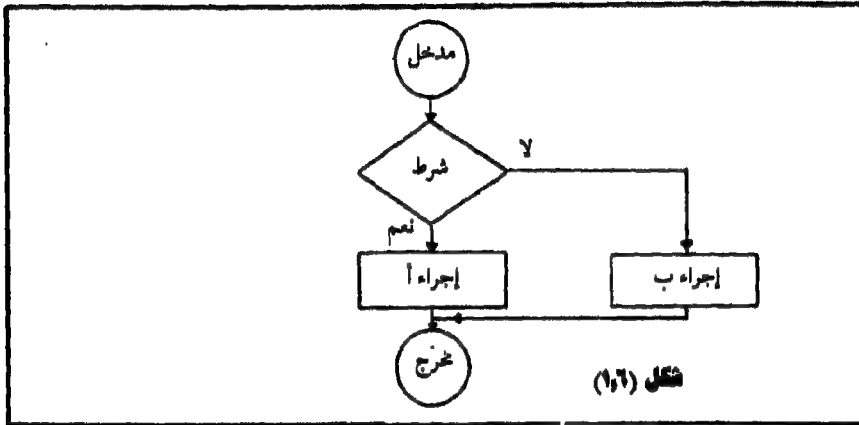


(١) Lipschutz, Seymour, Essential Computer Mathematics, McGraw- Hill Book Company, 1982, P 109.



## ٢ - مزدوج البديل Double Alternative :

حيث يكون هنالك شرط، فإن تحقق نفذ إجراء معين، وإن لم يتحقق نفذ إجراء آخر مختلف كما هو موضح بالشكل ١,٦ التالى :



## ٣ - منطق التكرار :

وهذا يختص بالدوارة أو تنفيذ عملية معينة - أو مجموعة عمليات - عددًا من المرات وهو يتخذ ثلاثة أشكال :

### الشكل الأول :

وهو الذى يستخدم مؤشراً معيناً لتحديد عدد المرات التى ينفذ فيها الإجراء أو مجموعة الإجراءات.

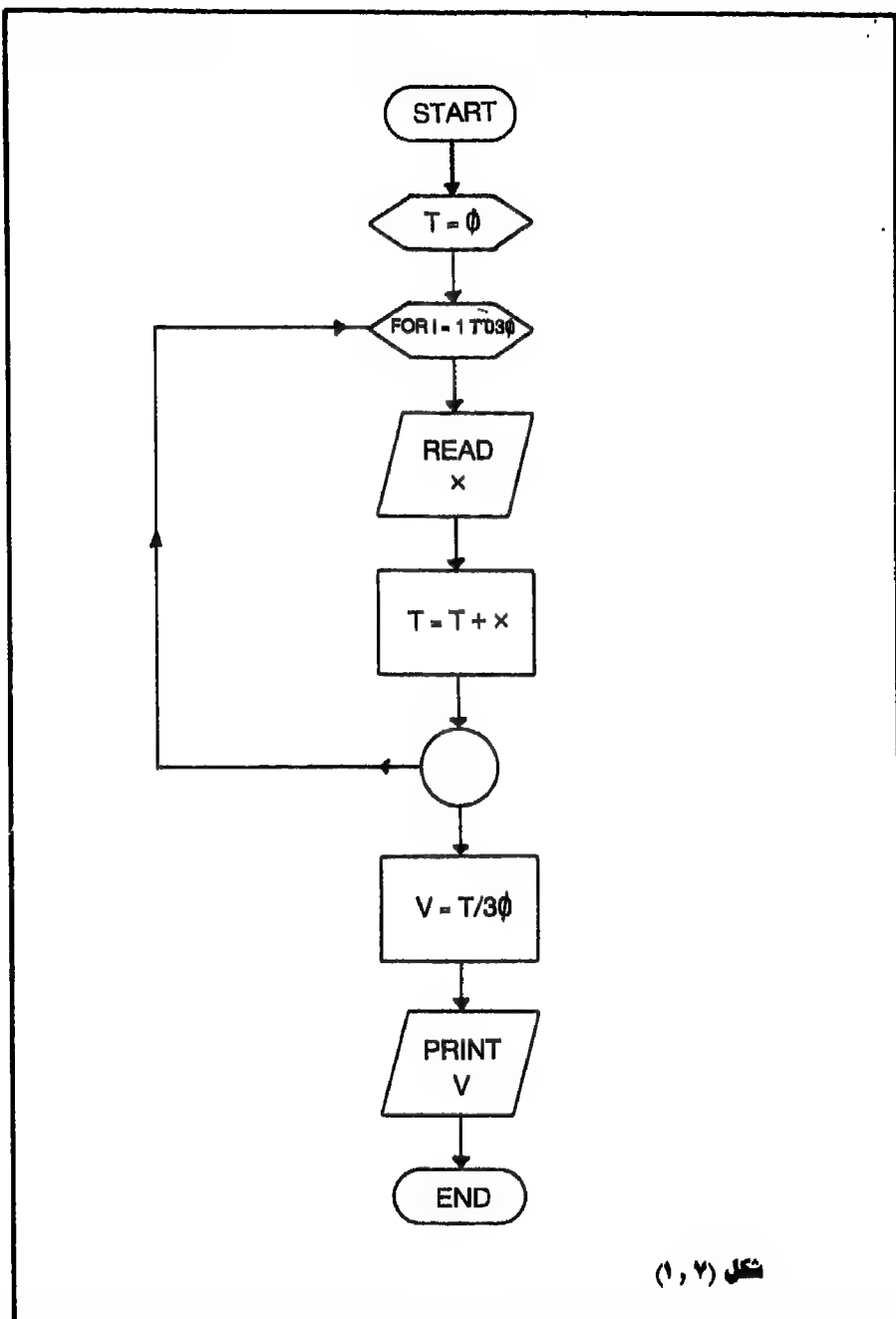
وعدد المرات يتحدد بأن المؤشر يأخذ قيمة ابتدائية وقيمة نهائية وإضافة. وله عدة تسميات حسب لغة البرمجة المستخدمة فهو يستخدم عبارة DO مثل :

DOR = 1 TO N BY 1

أو فى لغة بيسك يأخذ عبارة FOR ...NEXT مثل :

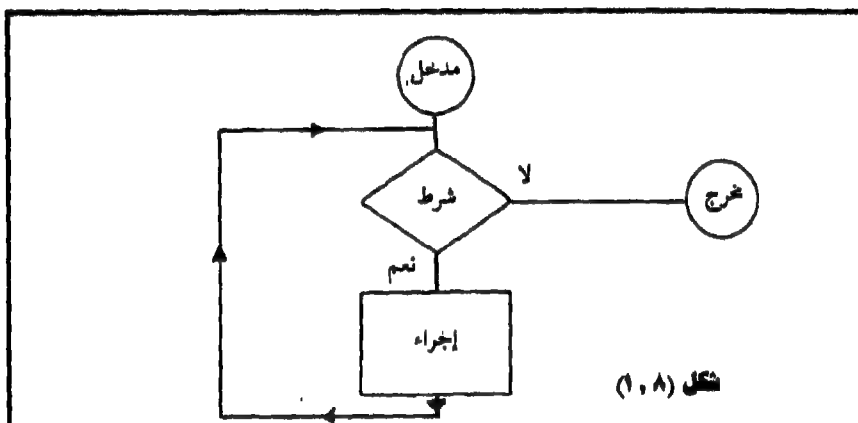
FOR J = 1 TO N STEP 1

والشكل ١,٧ يوضح هذا النوع من التكرار حيث يبين حل مسألة لقراءة ٣٠ رقماً وطباعة متوسطها.



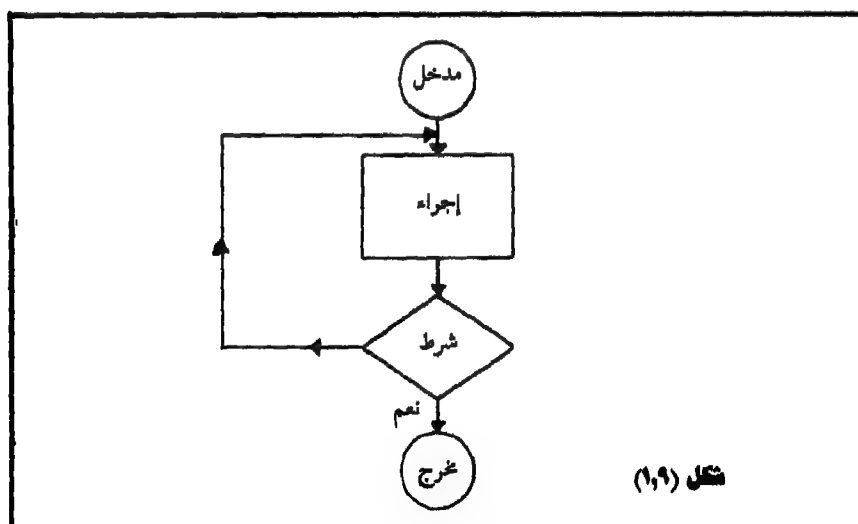
### الشكل الثاني :

وهذا يعرف بتركيبة DO WHILE وهو أن ينفذ إجراء معين عدداً من المرات اعتياداً على صحة شرط معين، كما هو في الشكل ١,٨ .



### الشكل الثالث :

وهذا يستخدم تركيبة DO UNTIL وهو أن تستمر في تنفيذ إجراء معين إلى أن يتحقق شرط معين، كما هو موضح في الشكل ١,٩ .



## ٦ - شبه الجفرة :

في العديد من الحالات قد لا تفي خرائط سير العمليات بالغرض المطلوب، وهو التعبير عن الخوارزمية، وجعل كتابة البرنامج أمراً سهلاً. فخرطة سير العمليات قد لا تكون كافية، وربما تكون صعبة الفهم لبعض المسائل المعقدة. وعليه فهناك طريقة قد تكون مكملية لخرائط سير العمليات، أو قد تغني عنها في كثير من الحالات وهي شبه الجفرة.

ميزة شبه الجفرة أنها تكتب بطريقة تشبه الكلام العادي، لذلك فهي سهلة في الفهم والكتابة.

دعنا نرى الآن كيف يمكننا تمثيل الأشكال الثلاثة التي تطرقنا لها في خرائط سير العمليات بواسطة شبه الجفرة :

### المنطق التسلسلي :

وهو الذي يتخذ الشكل التالي :

عملية أ  
عملية ب

### مثال :

```
READ SPEED, TIME
DISTANCE = SPEED X TIME
PRINT SPEED, TIME, DISTANCE
END
```

### منطق الاختيار :

وهو الذي تستخدم فيه أداة المقارنة IF ويبدأ بـ IF وينتهي بـ END IF وله شكلان كما رأينا من قبل.

### مفرد البديل :

ويتخذ الشكل التالى :

```
IF Condition THEN
  Procedure A
END IF
```

### مثال :

```
READ DISTANCE, TIME
SPEED = DISTANCE / TIME
IF SPEED > 100 THEN
  PRINT "HIGH SPEED"
END IF
PRINT SPEED, DISTANCE, TIME
END
```

لاحظ كيفية كتابة العمليات بين IF و END IF حيث تكون إلى الداخل قليلاً، وهو إجراء متعارف عليه لتسهيل قراءة وفهم شبه الجفرة.

### مزدوج البديل :

وهو الذى يستخدم فيه تعبير IF... THEN... ELSE ويتخذ الشكل التالى :

```
IF Condition THEN
  Procedure A
ELSE
  Procedure B
END IF
```

### مثال :

```
READ DISTANCE, TIME
SPEED = DISTANCE / TIME
IF SPEED > 100 THEN
  PRINT "HIGH SPEED"
ELSE
  PRINT "LOW SPEED"
END IF
PRINT DISTANCE, TIME, SPEED
END
```

### منطق التكرار :

وهو كما رأينا يتخذ ثلاثة أشكال سنستعرضها فيما يلي :

#### الشكل الأول :

وهو كما أسلفنا يستخدم تركيبة :

DO I = 1 TO N BY 1

حيث I هو المتغير الذى يتحكم فى الدوارة  
N هو المتغير الذى يمثل القيمة النهائية للدوارة . وعليه فكل التركيبة تعنى أن ننفذ الإجراء  
أو الإجراءات التالية بقيمة تساوى 1 إلى أن تصبح قيمة تساوى N مع زيادة 1 إلى I فى كل  
دورة .

#### مثال :

سنعيد كتابة نفس المثال الذى مثلناه فى حديثنا عن خرائط سير العمليات - المثال التالى -  
باستخدام شبه الجفرة .

```
T = 0
READ N
DO I = 1 TO N BY 1
  READ X
  T = T + X
END DO
V = T/N
PRINT V
END
```

#### الشكل الثانى :

وهذا يكتب باستخدام عبارة DO WHILE ويتخذ الشكل العام التالى :

```
DO WHILE Condition
  Procedure
END DO
```

### مثال :

المثال التالي يمثل شبه جفرة لقراءة مجموعة من الأرقام يرمز لعددتها بالمتغير N وهو مجهول وطباعة الأرقام واحتساب وطباعة مجموعها والوسط الحسابي لها، علماً بأن الخروج من الدوارة يتم حين يكون أحد الأرقام صفراً.

```

N = 0
S = 0
DOWHILE X ≠ 0
    READ X
    PRINT X
    N = N + 1
    S = S + X
END DO
V = S/N
PRINT S,V
END
    
```

### الشكل الثالث :

وهذا الشكل يستخدم عبارة DO UNTIL ويتخذ الصورة التالية :

```

DO UNTIL Condition
    Procedure
END DO
    
```

### مثال :

سنعيد كتابة نفس المثال السابق باستخدام تركيبة DO UNTIL

```

N = 0
S = 0
DO UNTIL X = 0
    READ X
    PRINT X
    N = N + 1
    S = S + X
END DO
V = S/N
PRINT S,V
END

```

## ٧ - خوارزميات أساسية :

سنحاول فيما يلي أن نتعرض لأهم الخوارزميات ، التي تعتبر أساسية لدراستنا هذه بشكل عام ، ولهذا الفصل بشكل خاص . والعمليات التي ستعرض لها الآن تعتبر من أكثر العمليات استخداماً ، وستصادفنا كثيراً طوال دراستنا .

### ١ - تبديل قيمتي متغيرين :

كثيراً ما تصادفنا حالات نحتاج فيها إلى تبديل قيمتي متغيرين أثناء معالجتنا لبعض البيانات . أكثر التطبيقات التي نحتاج فيها لهذه العملية هي تطبيقات الفرز .

#### مثال :

إذا كان لدينا المتغير A وقيمته 27 والمتغير B وقيمته 65 والمطلوب تبديل القيمتين ، بحيث تصبح قيمة A هي 65 وقيمة B هي 27 .

#### الحل :

الوضع الحالي للمتغيرين

A	B
27	65



## الوضع المطلوب

A	B
65	27

قد يتبادر الى الذهن مباشرة أن الحل هو كالآتي :

$$A = B$$

$$B = A$$

وهو بطبيعة الحال حل خاطيء إذ سيؤدى إلى النتيجة التالية :

A	B
65	65

حيث سيأخذ المتغيران نفس القيمة 65 وهى قيمة B الأصلية . وذلك لأن عبارة  $A = B$  ستأخذ قيمة B وهى 65 وتضعها في A وبالتالي فقيمة A السابقة ستضيع ولا مجال لاستردادها . أما العبارة الثانية  $B = A$  فلن تكون ذات قيمة بعد ذلك .

الحل الصحيح هو أن نحفظ قيمة A الأصلية في مكان ما مؤقتاً حتى لا تضيع ، ومن ثم وضعها في B وعليه يكون توصيف الخوارزمية كالآتي :

١ - احفظ في C قيمة A الأصلية .

٢ - ضع في A قيمة B الأصلية .

٣ - ضع في B قيمة A الأصلية والمحفوظة في C .

ويمكن تمثيل هذه الخوارزمية بشبه الجفرة التالية :

$$C = A$$

$$A = B$$

$$B = C$$

## ٢. العد COUNTING :

من العمليات التي نحتاج إليها كثيراً : عملية العد، فقد نحتاج أن نعد حالات معينة من مجموعة من الحالات. كأمثلة على ذلك : عدد الأشخاص الذين تقل أعمارهم عن ٢٠ من مجموعة من سكان مدينة ما، الأشخاص الذين تزيد رواتبهم على ١٠,٠٠٠ دولار من موظفي مؤسسة ما، الطلاب الذين تقل درجاتهم عن ٦٠ في اختبار ما، وهكذا.

### مثال :

لدينا درجات  $N$  من الطلبة في اختبار ما، والمطلوب عدد الطلاب الذين تقل درجاتهم عن ٦٠.

### الحل :

لا بد أن يكون لدينا متغير معين نستخدمه كعداد وكلما وجدنا درجة أقل من ٦٠ أضفنا واحداً إلى هذا العداد. لكن السؤال هو: كيف تتم عملية الإضافة هذه؟  
تتم هذه العملية بالصورة التالية والتي رأيناها كثيراً عند حديثنا عن شبه الجفرة :

$$\text{العداد الجديد} = \text{العداد السابق} + 1$$

حيث إن العداد الجديد والعداد السابق يتم تمثيلهما بمتغير واحد مثل  $C$ ، وهذا معناه أن القيمة الجديدة للعداد تساوي قيمته السابقة مضافاً إليها واحد، كالتالي :

$$C = C + 1$$

وهذه الصورة ستصادفنا كثيراً في مجال معالجة البيانات، حيث تدخل قيمة المتغير السابقة في تحديد قيمته الجديدة. فقط هنالك قاعدة ينبغي مراعاتها وهي أنه حين يوجد متغير ما على يمين ويسار علامة  $=$  في نفس العبارة، فلا بد من إعطاء هذا المتغير قيمة ابتدائية. وفي هذه الحالة - العد - ومعظم الحالات فإن القيمة الابتدائية لهذا المتغير تكون صفراً.

### توصيف الخوارزمية :

- ١ - اجعل القيمة الابتدائية للعداد صفراً.
- ٢ - اقرأ عدد القيم  $N$ .

- ٣ - اقرأ إحدى الدرجات.
- ٤ - إذا كانت الدرجة أقل من ٦٠ فأضف 1 إلى العدد.
- ٥ - كرر الخطوات ٣ - ٤ إلى أن تقرأ كل القيم N
- ٦ - اطبع عدد الدرجات أقل من ٦٠.

وهذه الخوارزمية يمكن تمثيلها بشبه الجفرة التالية :

```

C = Ø
READ N
DO I=1 TO N BY 1
  READ X
  IF X< 60 THEN
    C = C + 1
  END IF
END DO
PRINT C

```

### ٣ = جمع عدد من الأرقام : SUMMATION

من العمليات الأساسية والمستخدم بكثرة هو استخدام الكمبيوتر لجمع مجموعة من الأرقام ، وفي مجال دراستنا هذه على وجه الخصوص نجد أن هذه العملية مستخدمة في الغالبية العظمى من المقاييس الإحصائية .

#### مثال :

من أهم وأبسط المقاييس الإحصائية هو الوسط الحسابي ، وقد رأينا في مجال حديثنا عن شبه الجفرة كيفية احتساب الوسط الحسابي لمجموعة من الأرقام ، وقد رأينا كذلك أنه لكي نحسب الوسط الحسابي فلا بد من جمع كل القيم ، ومن ثم قسمتها على عددها .

### توصيف الخوارزمية :

- ١ - اجعل القيمة الابتدائية للمجموع صفراً.
- ٢ - اقرأ عدد القيم N .
- ٣ - اقرأ إحدى القيم .

- ٤ - أضف القيمة إلى المجموع .
- ٥ - كرر الخطوتين ٣ - ٤ إلى أن تقرأ كل القيم N .
- ٦ - اطبع مجموع القيم .

وقد رأينا في حديثنا عن شبه الجفرة كيفية تمثيلها بعدة طرق، ونعيد كتابتها هنا بإحدى هذه الطرق :

```
T = 0
READ N
DO I=1 TO N BY 1
  READ X
  T = T + X
END DO
PRINT T
```

لاحظ أننا استخدمنا نفس التعبير  $T = T + X$  والذي تحدثنا عنه في معرض حديثنا عن العد حيث يعنى أن قيمة المجموع الجديد T تساوى قيمته السابقة مضافاً إليها القيمة التى قرئت مؤخراً X .

---

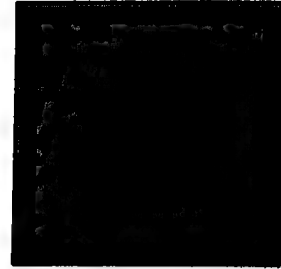
**مقدمة في  
لغة بيسك**

---

**الفصل  
الاول**



## مقدمة فى لغة بيسك



### ١ - مدخل :

تعتبر لغة بيسك من أكثر اللغات ذات المستوى العالى شهرة واستخداماً، واسم اللغة BASIC مشتق من العبارة الإنجليزية :

Beginners' ALL-purpose Symbolic Instruction Code

والتي تعنى : اللغة الرمزية المتعددة الأغراض للمبتدئين .

تم تطوير لغة بيسك حوالى عام ١٩٦٣ فى كلية دارتموث لتسهيل تعليم منطق البرمجة للطلاب، وقد استخدمت من قبل الطلاب فى التخصصات المختلفة، ومنذ ذلك الوقت واللغة تكتسب كل يوم شعبية جديدة. وقد أعطى انتشار أجهزة الكمبيوتر الشخصى فى السنوات الأخيرة دفعة كبيرة للغة، إذ أنها توجد - تقريباً - فى كل هذه الأجهزة، حتى الآلات الحاسبة القابلة للبرمجة بها إمكانات برمجة بلغة بيسك.

تمتاز لغة بيسك بالعديد من المزايا التى أكسبتها كل هذه الشعبية، نذكر منها :

- ١ - سهولة التعلم، إذ تشبه عباراتها إلى حد كبير المعادلات الجبرية العادية، كما أنها تستخدم كلمات إنجليزية مألوقة، مثل READ و PRINT و STOP .
  - ٢ - سهولة التنفيذ، إذ أنها مثالية فى الأجهزة التى تستخدم نظام مشاركة الوقت TIME SHARING حيث يجلس المستخدم أمام نهائية مرتبطة بجهاز حاسب كبير، ويكتب البرنامج ويترجمه الحاسب وينفذه فى نفس الوقت.
  - ٣ - تتمتع لغة بيسك بمقدرات رياضية عالية إذ بها دوال FUNCTIONS جاهزة مثل الجذر التربيعى واللوغاريتم، ودوال حساب المثلثات وغيرها.
- هنالك العديد من نسخ VERSIONS بيسك المطورة، إلا أن المعهد الأمريكى للمواصفات قد أقر بيسك المعيارية BASIC ANSI والتى هى بيسك الأساسية دون إضافات، والتى سوف نتبعها فى هذا الفصل .

## ٢ . المكونات الأساسية لبرنامج بيسك :

نكتب البرامج بلغة بيسك سطرًا فسطرًا، وكل سطر يعبر عن أمر معين أو تعليمة لأداء فعل معين. كل سطر من البرنامج يبدأ برقم، وكل رقم سطر لا بد أن يكون أكبر من رقم السطر الذي قبله، وليست هنالك قاعدة أخرى لترقيم الأسطر، فكل مبرمج حر في أن يختار التسلسل الذي يناسبه على أن تراعى القاعدة، وهى أن يكون كل سطر أعلى من السطر الذى قبله، على أنه يفضل دائماً أن يكون هنالك فراغات بين أرقام الأسطر تحسباً لإدخال سطر جديد - أو عدة أسطر - بين سطرين من الأسطر الأصلية.

وتختلف البرامج في حجمها الذى قد يكون سطرًا واحداً فقط هو عبارة END والتي تدل على نهاية البرنامج، ولا بد من وجودها في كل برنامج. البرنامج التالى برنامج صحيح من الناحية القاعدية للغة :

10 END

لكنه من الناحية العملية لا يقدم شيئاً للمستخدم الذى يود أن يستخدم الحاسب ليحل مشكلة ما.

دعنا الآن نكتب أول برنامج بلغة بيسك .

**مثال (٢، ١)**

تأمل هذا البرنامج :

10 PRINT 'THIS IS THE FIRST PROGRAM'

20 END

يتكون هذا من تعليمتين هما رقم 10 ورقم 20 وبما أننا ذكرنا أن تعليمة END لا بد من وجودها في كل برنامج، إذن فالبرنامج يتكون من تعليمة واحدة فقط هى رقم 10 . عند تنفيذ هذا البرنامج سنرى الآتى :

THIS IS THE FIRST PROGRAM

الذى فعله الكمبيوتر عند تنفيذ البرنامج هو أنه نفذ التعليمة في السطر 10 وهى تعليمة PRINT وقد أخرج على الشاشة العبارة التى بعد كلمة PRINT .



### تعليمة الاخراج LOOP :

تعليمة PRINT من أهم تعليقات لغة بيسك ، فهي الصلة بين المستخدم والجهاز، فكل الرسائل والنتائج التى يخرجها الجهاز يتم توصيلها للمستخدم عن طريق تعليمة PRINT . تستخدم تعليمة PRINT لإخراج العبارات الثابتة كما رأينا فى المثال السابق، وفى هذه الحالة لا بد من وضع العبارة التى نريد إظهارها بين علامتى ' ' (فى بعض الأجهزة تستخدم علامة ، ،) .

### أمثلة :

```
10 PRINT 'MY NAME IS AHMED'
20 PRINT 'ENTER YOUR AGE'
30 PRINT 'PLEASE ENTER TWO NUMBERS'
70 PRINT 'THE ANSWER = '
```

عند تنفيذ الحاسب لأى من التعليقات السابقة نجد أن الجهاز يظهر ما هو مكتوب بين علامتى ' ' كاملاً ودون تصرف .

كذلك يمكن لتعليمة PRINT أن تخرج محتويات حقول متغيرة، وستتطرق لهذا لدى حديثنا عن تعليمة الإسناد LET . أما الآن فدعنا نتوقف قليلاً لإلقاء نظرة على أنواع البيانات .

### الثوابت والمتغيرات :

الثابت هو قيمة ثابتة لا يطرأ عليها أى تغيير، وهى نوعان : ثوابت رقمية ، وهى الأرقام عموماً موجبة أو سالبة، صحيحة أو عشرية، وثوابت حرفية، وهى أى مجموعة من الحروف أو/و الأرقام وأى علامات خاصة تكون محصورة بين علامتى ' ' كما رأينا فى المثال السابق .

أما المتغيرات فهى الحقول التى تحمل قيماً متغيرة تتغير قيمها بتغير المحتوى الذى تحمله . وهى كذلك نوعان : متغيرات رقمية، ومتغيرات حرفية .

المتغيرات الرقمية هى التى تحمل بيانات رقمية، مثل : درجات الحرارة، الارتفاعات، السرعات، الأطوال، عدد أفراد الأسرة، الأعمار، الرواتب وغيرها .

أما المتغيرات الحرفية فهى الحقول التى تحمل قيماً حرفية، مثل : الأسماء عموماً، العناوين، رموز قطع الغيار، وصف الأشياء، وهكذا .

للتعبير عن المتغير الرقـمى فى برنامج بيسك فإننا ربما نستخدم حرفاً واحداً أو حرفاً واحداً وبعده رقم واحد<sup>١</sup> ، فمثلاً هذه أمثلة لمتغيرات رقمية صحيحة :

X

J5

R2

A

وللتعبير عن متغير حرفى فإننا ربما نستخدم أيضاً حرفاً واحداً فقط بعده علامة الدولار \$ للتفريق بين المتغير الرقـمى والمتغير الحرفى . هذه أمثلة لمتغيرات حرفية :

M \$

A' \$

Y \$

G \$

### مباراة الملاحظات REM :

كما سبق وذكرنا فلغة بيسك لغة رمزية ، لذلك فقد يحتاج البرنامج لبعض الشرح لتتبعه وفهمه ولهذا الغرض تستخدم تعليمة REM .

عبارة REM تستخدم لكتابة الملاحظات فى البرنامج . هذه الملاحظات تؤدى إلى توثيق البرنامج ، مما يساعد على فهمه من قبل أى شخص يقرأه ، وبالتالي تساعد على تتبع البرنامج وتعديله إذا لزم الأمر.

تكتب عبارة REM فى أى مكان بالبرنامج ، وعندما يجد مترجم اللغة هذه العبارة فى أى مكان ، فإنه لا ينظر إلى ما بعدها ويعتبره خاصاً بتوثيق البرنامج .

10 REM PROGRAM NO.1

أمثلة

30 REM THIS PROGRAM CALCULATES THE AVERAGE

80 INPUT N REM NO. OF OBSERVATIONS

---

(١) بعض الأنظمة تستخدم أكثر من حرف .

### تعليمية الإسناد LET :

البيانات التي تطرقنا لها آنفاً لا بد من وسيلة لتوصيلها للبرنامج . يتم هذا عن طريق تعليمية LET وهي تعليمية أساسية في لغة بيسك .  
تأمل هذه العبارة :

$$20 \text{ LET } R = 64$$

هذه العبارة معناها أن المتغير الرقمي R - بعد تنفيذ هذه التعليمية - سيأخذ القيمة على يمين علامة الإسناد = وهي 64 . وينبغي هنا التفريق بين علامة الإسناد = وعلامة يساوي الحسابية . علامة = هنا لا تعني يساوي الحسابية ، بل هي دليل على إسناد القيمة التي على يمين العلامة إلى المتغير الذي على يسارها . ولا بد من وجود متغير واحد فقط على يسار علامة الإسناد = ، أما على يمينها فيمكن أن نجد واحداً من ثلاثة أشكال :

$$10 \text{ LET } = 916$$

(١) ثابت مثل

$$30 \text{ LET } N = M$$

أو (٢) متغير آخر مثل

$$70 \text{ LET } T = F - X + 7$$

أو (٣) تعبير حسابي مثل

ففي (١) نجد أن المتغير F قد أخذ القيمة 916 ، وفي (٢) نجد أن المتغير N قد أخذ نفس قيمة المتغير M . أما في (٣) فإن T قد أخذ قيمة التعبير  $F - X + 7$  .  
هذا بالنسبة للمتغيرات الرقمية ، أما الإسناد للمتغيرات الحرفية فيتم كذلك بتعليمية LET لكن في حالة المتغيرات الحرفية لا بد من وجود القيمة المراد إسنادها بين علامتي ' كما أوضحنا من قبل .

أمثلة :

$$30 \text{ LET } A\$ = 'PROGRAM 5'$$

$$40 \text{ LET } X\$ = 'THE AVERAGE IS'$$

$$60 \text{ LET } N\$ = 'MOHAMED ALI'$$

كذلك يمكن للمتغير الحرفي أن يأخذ قيمة متغير حرفي آخر .

أمثلة :

$$10 \text{ LET } B\$ = Y\$$$

$$50 \text{ LET } C\$ = D\$$$

من الجدير بالذكر أن كلمة LET نفسها يمكن عدم كتابتها مع احتفاظ التعليمات بنفس المعنى، فمثلاً العبارتان :

$$10 \text{ LET } E = T$$

$$10 E = T$$

تؤديان نفس الغرض ، وكذلك العبارتان :

$$60 \text{ LET } X\$ = 'ALI'$$

$$60 X\$ = 'ALI'$$

تؤديان الغرض نفسه .

### ٣ - العمليات الحسابية :

يتم التعبير عن أى عملية حسابية بطريقة قريبة من الشكل الحسابى العادى ، وذلك باستخدام العلامات - الإشارات - التالية :

العملية	الإشارة	مثال
الجمع	+	$X + Y$
الطرح	-	$X - Y$
الضرب	*	$X * Y$
القسمة	/	$X / Y$
الرفع للقوة	**	$X ** Y$

وتستخدم تعليمات LET لإجراء هذه العمليات ، ويمكن جمع أكثر من عملية فى تعليمات LET واحدة :

أمثلة :

$$20 \text{ LET } X = 9 + 5$$

$$30 D = A + F$$

$$40 P = M - 2 + H$$

$$50 \text{ LET } A = N * R - 1$$

$$60 L = E / 6 * Y ** 2$$

لمعرفة ناتج أى تعبير حسابى يحتوى على أكثر من عملية ، فإنك تبدأ من اليسار إلى اليمين ، إلا إذا اختلفت العلامات وفى هذه الحالة تخضع العمليات لترتيب معين أو أولويات كالتالى :

الرفع للقوة أولاً

يليه الضرب والقسمة وكلاهما فى نفس المرتبة ،  
يلى ذلك الجمع والطرح وكلاهما فى نفس المرتبة .

كما يمكن استخدام الأقواس وهذه عند استخدامها تأخذ الأولوية القصوى. تأمل هذه العبارة :

$$30 A = 8 + 4 * 2$$

ناتج هذه العبارة هو 16 وليس 24 ، إذ أننا ننفذ ، أولاً عملية الضرب  $4 * 2$  إذ للضرب أولوية على الجمع ، ثم بعد ذلك نضيف 8 للناتج .

أما إذا أردنا أن نضرب 2 فى مجموع  $8 + 4$  فعلينا فى هذه الحالة أن نضع  $8 + 4$  بين قوسين وحينئذ تأخذ العملية داخل القوسين الأولوية على العملية خارجهما ، ويصبح الناتج 24 .

يمكن استخدام تعليمة PRINT التى تطرقنا لها سابقاً لإجراء العمليات الحسابية ، وفى هذه الحالة ناتج العملية يتم إظهاره فقط ولا يخزن فى أى متغير.

**أمثلة :**

40 PRINT 6 + 8

50 PRINT T1 \* 3 - F

60 PRINT N / (N - 1)

**مثال (٢، ٢) :**

دعنا الآن نكتب برنامجاً كاملاً نستخدم فيه ما تعلمناه حتى الآن . البرنامج التالى يأخذ قيمتين رقميتين يجمعهما ، يحسب متوسطهما ، ثم يطبع الرقمين والمجموع والمتوسط :

```
10 REM PROGRAM TO ADD TWO NUMBERS
20 REM AND TO PRINT THEIR SUM AND AVERAGE
30 X = 52
40 Y = 34
50 S = X + Y
60 V = S/2
70 PRINT X,Y
80 PRINT S,V
90 END
```

عند تنفيذ هذا البرنامج سيظهر المخرجات التالية :

52	34
86	43

ولا بد أنك لاحظت أن لدينا سطرين في المخرجات ، هذا ناتج عن وجود تعليمتي PRINT فكل تعليمة من تعليمات PRINT تطبع سطراً بعدها . كذلك لا بد أنك لاحظت أن بكل سطر من المخرجات قيمتين ، وهذا كذلك ناتج عن وجود عنصرين في كل من تعليمتي PRINT وأنا قد فصلنا بينهما بواسطة الفاصلة ( , ) .

استخدام الفاصلة ( , ) كفاصل بين عناصر PRINT يظهر المخرجات وهي بعيدة عن بعضها . فالفاصلة تقسم الشاشة إلى خمس مناطق طباعة ، الفرق بين كل منطقة والمنطقة التالية لها يتراوح بين 15 - 19 اعتماداً على الجهاز .  
يمكن كذلك استخدام الفاصلة المنقوطة ( . ) وفي هذه الحالة نجد أن المخرجات تكون قريبة من بعضها .

من الممكن جمع عبارات ثابتة ومتغيرات في تعليمة PRINT واحدة . فمثلاً زيادة في الإيضاح وتعريف المخرجات في البرنامج السابق ، كان يمكن للسطر رقم 80 أن يكون كالاتي :

80 PRINT 'TOTAL = ' ; S ; 'AVERAGE = ' ; V

وعندها كانت المخرجات ستكون

TOTAL = 86 AVERAGE = 43

#### ٤ - أوامر الإدخال :

لإمداد البرنامج بالبيانات فإننا نستخدم تعليمتين - غير تعليمية LET - هما INPUT و READ .

##### تعليمية INPUT :

نستخدم تعليمية INPUT لإمداد البرنامج بالبيانات أثناء التنفيذ ، لذلك فهي مناسبة للبيانات القليلة ، وللبرامج التي تتطلب تخطباً مباشراً بين المستخدم والحاسب .

تركب التعليمة من عبارة INPUT ثم اسم المتغير ، أو أسماء المتغيرات ، التي قد تكون متغيرات رقمية أو حرفية .

### أمثلة :

```
20 INPUT T
50 INPUT A, B, C
60 INPUT  N, D$, F$, M
70 INPUT  Y$, X
```

تستخدم تعليمة INPUT عندما يراد من المستخدم إدخال بيانات معينة أثناء تنفيذ البرنامج . وعند تنفيذ أى من عبارات INPUT فإنه تظهر على الشاشة علامة استفهام (؟) وما على المستخدم حينئذ إلا إدخال القيمة المطلوبة .

### مثال (٢، ٣)

```
10 INPUT A
20 PRINT
30 END
```

وعند التنفيذ

```
.RUN
? 8
8
```

وزيادة في توضيح الشيء المطلوب ، فإنه تستخدم في العادة تعليمة PRINT قبل أى تعليمة INPUT لتظهر للمستخدم الشيء المطلوب إدخاله .

### مثال ( ٢، ٤ ) :

```
10 PRINT 'ENTER YOUR NAME'
20 INPUT  N$
30 PRINT 'ENTER YOUR AGE'
40 INPUT A
50 PRINT N$; 'YOU ARE' A; 'YEARS OLD'
60 END
```

عند تنفيذ هذا البرنامج :

```

RUN
ENTER YOUR NAME
? ALI
ENTER YOUR AGE
? 23
ALI YOU ARE 23 YEARS OLD
    
```

### تعلية READ :

تعلية READ - كما يدل على ذلك اسمها - تستخدم كذلك لإمداد البرنامج بالبيانات .  
الفرق بين READ و INPNT أن البيانات في الأخيرة تدخل للبرنامج أثناء التنفيذ، أما بالنسبة  
للأولى فإن البيانات تكون مضمنة داخل البرنامج في عبارة DATA .

مثال : ( ٥ ، ٢ ) :

البرنامج التالي يقرأ اسم وعمر شخص ، ويطبعمها :

```

10 READ N$, A
20 DATA AHMED, 18
30 PRINT N$; 'IS ' A; 'YEARS OLD '
40 END
RUN
AMED IS 18 YEARS OLD
    
```

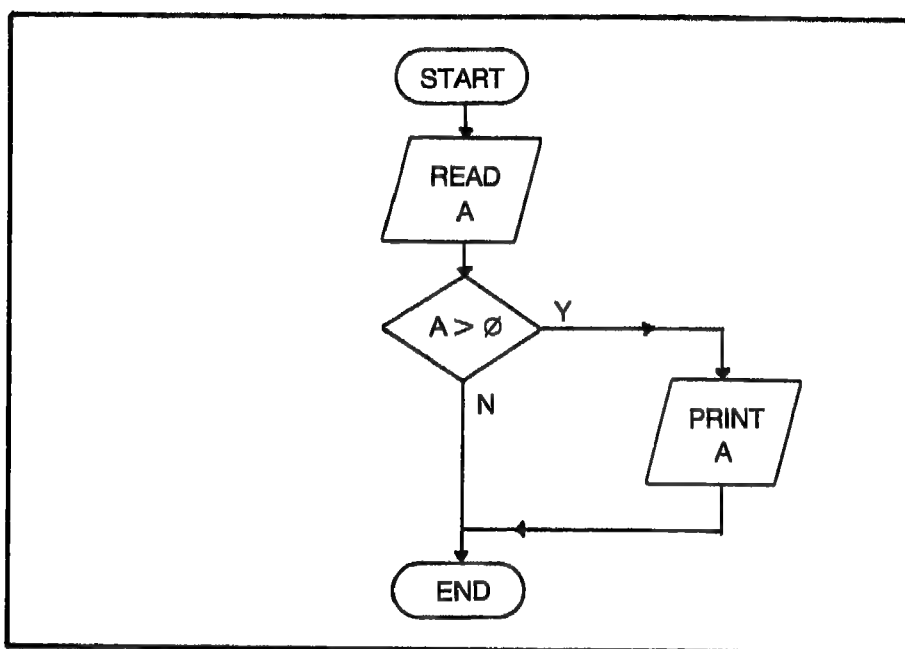
لاحظ أن البيانات موجودة في عبارة DATA ، كذلك لاحظ الارتباط بين عبارتي READ و  
DATA . فكل عنصر في READ لا بد له من بيان في DATA ويجب أن يكون التسلسل هو نفسه  
في العبارتين . عبارة DATA من العبارات التي لا تنفذ ، فهي تستخدم فقط لحفظ البيانات ؛  
لذلك فهي يمكن وضعها في أى مكان في البرنامج ، ولا يجب بالضرورة أن تكون بعد عبارة  
READ مباشرة ؛ إذ يمكن أن تكون قبلها أو بعدها بعدة عبارات .

### ٥ . نقل التسلسل والمقارنة :

قليل جداً من المسائل هي تلك التي ينساب تسلسلها من أعلى إلى أسفل دون تغيير  
في مسارها . معظم المسائل العملية تتطلب اتخاذ قرار معين يغير مسارها في اتجاه أو آخر ،



فمثلاً إذا أردنا أن نقرأ رقماً معيناً، فإن كان الرقم موجباً نطبعه وإلا نهمله، فالمخطط التالي يمكن أن يؤدي ذلك الغرض :



لتمثيل الجزء الخاص بالمقارنة في لغة بيسك، فإننا نستخدم أداة المقارنة IF والتي نختبر قيمتين باستخدام الإشارات التالية :

الإشارة	معناها
=	يساوى.
>	أكبر من.
<	أصغر من.
<>	لا يساوى.
>=	أكبر من أو يساوى.
<=	أصغر من أو يساوى.

**مثال (٦ ، ٢) :**

والآن دعنا نكتب البرنامج الذى رسمنا مخططة سابقاً :

```
10 INPUT A
20 IF A > 0 THEN 40
30 GOTO 50
40 PRINT A
50 END
```

لاحظ أن عبارة IF تتكون من IF ثم الشرط Condition ثم عبارة THEN ثم رقم سطر. في حالة تحقق الشرط ينفذ الجزء الذى بعد THEN وهو أن ينتقل التسلسل إلى السطر رقم 40 وإذا لم يتحقق الشرط يستمر التسلسل كما هو إلى السطر 30 والذى بدوره ينقل التسلسل بعبارة GOTO إلى السطر الأخير وهو 50 .

تستخدم تعليمة GOTO لنقل التسلسل من سطر إلى سطر آخر، وهو نوعان : نقل غير مشروط، كما فى السطر 30 ، ونقل مشروط أى بشرط معين، كما فى السطر 20 حيث يمكن لتلك العبارة أن تكتب :

```
20 IF A > 0 GOTO 40
```

فعبارتنا THEN و GOTO هنا تؤديان نفس الغرض .

من العبارات المطورة عبارة IF ، فليس من الضرورة أن يكون بعد عبارة THEN دائماً رقم سطر، إذ كان يمكن أن نختصر البرنامج السابق كالاتى :

```
10 INPUT A
20 IF A > 0 THEN PRINT A
30 END
```

وكان سيؤدى لنفس النتيجة ، إلا أن هذا النوع من عبارة IF ليس موجوداً فى كل نسخ بيسك .

## ٦- الدوارة LOOP وعبارة GOTO :

من الميزات الكبيرة للكمبيوتر قدرته على تكرار عملية معينة - أو مجموعة عمليات - عدداً من المرات . فمثلاً يمكن تطوير البرنامج في المثال (٦ ، ٢) بحيث يكون لدينا عدد من درجات طلاب في امتحان ما ، ونريد أن نطبع فقط الدرجات من 60 فما فوق . ولنفرض أن نهاية البرنامج تكون بإدخال الدرجة 999 ، فالبرنامج التالي يؤدي ذلك الغرض :

مثال (٦، ٢) :

```
10 INPUT X
20 IF X = 999 GOTO 60
30 IF X > 60 THEN 10
40 PRINT X
50 GOTO 10
60 END
```

لاحظ استخدام عبارة GOTO في السطرين 20 و 50 . عبارة GOTO في السطر 20 مرتبطة بشرط معين وهو (X = 999) لذلك تعرف GOTO هنا بأنها مشروطة CONDITIONAL ، ويمكن في مثل هذه الحالات استخدام عبارة THEN كبديل لها ، كما هو الحال في السطر 30 أما GOTO في السطر 50 فهي غير مشروطة UNCONDITIONAL أى أن مسار البرنامج يتحول من السطر 50 إلى السطر 10 دون شرط . وعلى ذلك فالعبارات من السطر 10 إلى السطر 50 قد كونت لدينا ما يعرف بالدوارة . والدوارة ببساطة هي جزء من البرنامج يتم تنفيذه عدداً من المرات .

البرنامج في المثال التالي يقوم بقراءة درجات الطلاب ، إلا أنه في هذه المرة يطبع الدرجات أقل من 60 ، كما أن عدد الدرجات يرمز له بالمتغير N والذي يزداد به البرنامج أثناء التنفيذ بواسطة عبارة INPUT ليكتسب البرنامج مرونة .

مثال (٨، ٢) :

```

10 C = 0
20 INPUT N REM
30 INPUT X      عدد الدرجات
40 IF X >= 360 THEN N = 360
50 PRINT X
60 C = C + 1
70 IF C < N THEN 30
80 END
    
```

لاحظ أننا كونا دوائر بدءاً من السطر 30 وانتهاء للسطر 70 حيث يتم اختيار العداد C فإن كان أقل من عدد الدرجات N فإن التسلسل ينتقل إلى السطر 30 حيث يتم إدخال درجة أخرى.

كذلك لاحظ استخدام العداد C وكيف أننا أعطيناه القيمة صفر في البداية كإجراء ضروري لضمان خلوه من أى قيمة سابقة قد تؤثر على النتيجة. ولإجراء عملية العد نفسها، فإننا نضيف واحداً إلى العداد كل مرة بواسطة تعليمة :

```
60 C = C + 1
```

وهى تعنى - كما رأينا في الفصل السابق - أن قيمة C الجديدة تساوى قيمة C القديمة زائداً واحداً.

**تعليمة FOR... NEXT :**

يمكن تمثيل الدوائر بصورة أفضل، وذلك باستخدام صيغة FOR...NEXT وهى تغنى عن استخدام العداد واختباره، وما إلى ذلك. الدوائر تتركب من العبارتين التاليتين :

```
20 FOR J = 1 TO 65 STEP 1
```

```

.
.
.
    
```

```
60 NEXT J
```

لا بد لكل عبارة FOR من عبارة NEXT ، والعبارات بين سطرى FOR و NEXT هى التى تكون ما يعرف بجسم الدوارة ويعتمد عدد مرات تنفيذ العبارات فى جسم الدوارة على القيم الموجودة فى عبارة FOR .

تتركب عبارة FOR من متغير رقمى (J) ثم قيمة ابتدائية (1) ثم قيمة نهائية (65) ثم إضافة (1) ، كما أن عبارة NEXT تتكون من كلمة NEXT ثم متغير، والذي لا بد أن يكون نفس المتغير الذى استخدمناه فى عبارة FOR .

إذن فالتعليمة السابقة تعنى الآتى : نفذ العبارات فى جسم الدوارة من قيمة ل تساوى 1 إلى أن تصبح قيمة ل تساوى 65 مع إضافة 1 إلى ل كل مرة، أى أن الدوارة ستنفذ 65 مرة. من الجدير ذكره أن الإضافة STEP عندما تكون 1 فإنه يجوز عدم ذكرها، أى أن عبارة FOR السابقة يمكن أن تكون :

```
20 FOR J = 1 TO 65
```

القيمة الابتدائية، والقيمة النهائية، والإضافة ليس من الضرورى أن تكون أرقاماً ثابتة؛ إذ يمكن أن تكون كلها أو أى منها متغيرات رقمية (معروفاً قيمها مسبقاً). كما أن الإضافة يمكن أن تكون أى قيمة عدد صحيح، أو كسر عشري، سالب أو موجب.

**أمثلة :**

```
10 FOR K = 1 TO N
20 FOR F = 6 TO 77 STEP A
30 FOR L = J + 5 TO X - B * D
60 FOR M = 25 TO 5 STEP - 1
```

**مثال (٩، ٢) :**

البرنامج التالى يقرأ أعمار 50 شخصاً - عن طريق الشاشة - ويحسب ويطبّع متوسط الأعمار :

```
10 T = 0
20 FOR K = 1 TO 50
30 INPUT A
40 T = T + A
50 NEXT K
60 V = T/50
70 PRINT V
80 END
```

## ٧ - النسق والمصفوفات :

النسق ARRAY هو عبارة عن مجموعة من البيانات ذات صفة معينة . والفرق بين النسق والمتغير العادي ، أن كل عنصر من عناصر البيانات في النسق تكون له خانته المحجوزة في الذاكرة وبالتالي يمكن الرجوع لأي من هذه العناصر في أى جزء من البرنامج ، دون إعادة قراءة البيانات .

يتم التعبير عن النسق بعبارة DIM . هذه العبارة تؤدي لحجز خانات في الذاكرة بالعدد المذكور في عبارة DIM .

فمثلاً العبارة :

30 DIM R (35)

تؤدي إلى حجز 35 خانة في الذاكرة لمتغير رقمي اسمه R . وفي هذه الحالة ، يتم الرجوع لأي عنصر من عناصر R بواسطة ترتيبه داخل النسق ، فأول عنصر يأخذ الاسم ( 1 ) R والعنصر التاسع يأخذ الاسم ( 9 ) R والعنصر الثلاثون يأخذ الاسم ( 30 ) R وهكذا . ولا بد أن يكون الرقم بين قوسين ، هذا الرقم يعرف بالمتغير SUBSCRIPT ، ولا بد للمتغير أن يكون بين 1 والحد الأقصى للنسق والمذكور في عبارة DIM - في هذا المثال - 35 .

مثال ( ١٠ ، ٢ ) :

البرنامج التالي يقرأ أطوال 20 لاعباً في فريق لكرة السلة ويقوم بطباعة أكبر طول .

```

10 DIM L REM(20)    لحجز الخانات
20 H = 0 REM        لحفظ أكبر طول
30 FOR P = 1 TO 20
40 INPUT L ( P)
50 NEXT P
60 FOR V = 1 TO 20
70 IF L (V) > H THEN H = L (V)
80 NEXT V
90 PRINT H REM      الطول الأكبر
100 END
    
```

### النسق ذو البعدين :

حديثنا عن النسق حتى الآن كان عما يعرف بالنسق ذي البعد الواحد ، إلا أن النسق يمكن أن يكون له أكثر من بعد . إذ يمكن أن يكون لدينا نسق ذو بعدين ، وهذا ما يعرف كذلك بالمصفوفة ، والتي يتم التعبير عنها كذلك بعبارة DIM ولكن في هذه الحالة يذكر رقمان ، الأول يمثل عدد الصفوف ، والثاني عدد الأعمدة .

فمثلاً متوسط درجات الحرارة لثلاث مدن خلال 12 شهراً يمكن أن تمثل مصفوفة ذات 3 صفوف و 12 عموداً ، حيث يمثل كل صف إحدى المدن الثلاث ، وكل عمود يمثل أحد الشهور الاثني عشر . للتعبير عن هذه المصفوفة نستخدم تعليمة DIM كالآتي :

```
10 DIM T(3,12)
```

هذه العبارة تؤدي إلى حجز 36 خانة عبارة عن 3 صفوف و 12 عموداً لمصفوفة ذات بعدين باسم T .

للرجوع لأي من عناصر هذه المصفوفة ، لا بد من ذكر اسم المصفوفة ، ثم مؤشرين لتحديد العنصر المطلوب . يحدد العنصر الأول رقم الصف ، ويحدد الثاني رقم العمود . دعنا نرى الآن كيف تعامل هذه المصفوفة ، فمثلاً إذا أردنا قراءة المصفوفة وطباعتها فإننا نكتب البرنامج التالي :

**مثال (١١ ، ٢) :**

```
10 DIM T(3,12)
20 FOR I = 1 TO 3
30 FOR J = 1 TO 12
40 READ T(I,J)
50 PRINT T
60 NEXT J
70 NEXT I
80 DATA 20, 22, 19, ....
90 END
```

لعلك لاحظت أن لدينا في البرنامج عبارتي FOR وعبارتي NEXT وهذا ما يعرف بالدورات المتداخلة NESTED LOOPS . ولكي نستطيع التعامل مع كل عناصر النسق ذي البعدين لا بد من وجود هذا النوع من الدورات .

عند وجود دورتين متداخلتين ، القاعدة هي أن الدورة التي تبدأ أولاً تنتهي أخيراً ، والتي تبدأ أخيراً تنتهي أولاً . فدورة A في المثال بدأت أولاً ، لذلك انتهت أخيراً ، في حين أن دورة B بدأت أخيراً وانتهت أولاً . هذه القاعدة ضرورية لضمان عدم تقاطع دورتين .

### أوامر المصفوفات :

نسبة لما للمصفوفات من كثرة استخدام ، فقد أفردت لها أوامر خاصة بها في لغة بيسك باستخدام عبارة MAT .

لقراءة مصفوفة ما ، فإننا نذكر عبارة MAT ثم اسم المصفوفة فقط ، فمثلاً المصفوفة التي بالمثال السابق يمكن قراءتها بالعبارة التالية :

20 MAT READ T

هذه العبارة تؤدي لقراءة جميع عناصر المصفوفة T .

ولطباعة المصفوفة نستخدم هذه التعليمة :

30 MAT PRINT T

كذلك يمكن إجراء العمليات الحسابية على المصفوفات ، فلجمع مصفوفتين A, B في مصفوفة ثالثة C فإننا نستخدم هذه العبارة :

30 MAT C = A + B

نفس الشيء إذا أردنا طرح مصفوفتين ووضع الناتج في ثالثة :

40 MAT C = A - B

هنالك قاعدة هامة لجمع أي مصفوفتين أو طرحهما ، هي أنه في كلتا الحالتين لا بد من أن تكون المصفوفات الثلاث لها نفس الأبعاد (أي نفس عدد الصفوف ، ونفس عدد الأعمدة) يعنى أنه في العبارتين السابقتين لا بد أن تكون المصفوفات A, B, C لها نفس الأبعاد .



### ضرب المصفوفات :

يمكن كذلك ضرب مصفوفتين P, Q ووضع الناتج في مصفوفة R بالعلاقة التالية :

$$30 \text{ MAT } R = P * Q$$

كما للجمع والطرح قاعدة، فللضرب كذلك قاعدة، هي أنه عند ضرب مصفوفتين لابد أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (P) مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية (Q)، أما المصفوفة الناتجة فلا بد أن يكون لها نفس عدد صفوف المصفوفة الأولى (P) ونفس عدد أعمدة المصفوفة الثانية (Q).

### مدور المصفوفة : TRANSPOSE

مدور المصفوفة هو مصفوفة أخرى، صفوفها هي أعمدة المصفوفة الأولى، وأعمدتها هي صفوف المصفوفة الأولى. للحصول على مدور المصفوفة فإننا نستخدم عبارة TRN.

### مثال :

$$60 \text{ MAT } H = \text{TRN}(F)$$

وعند كتابة عبارات DIM في هذه الحالة لابد أن تكون أبعاد المصفوفة H عكس أبعاد المصفوفة F مثلاً :

$$20 \text{ DIM } F(3,4), H(4,3)$$

### مقلوب المصفوفة : INVERSE

مقلوب المصفوفة هو مصفوفة أخرى، تحمل نفس الأبعاد، وللحصول على مقلوب المصفوفة، لابد أن تكون المصفوفة مربعة SQUARE. (ليس من الضروري أن يكون لكل مصفوفة مربعة مقلوب).

### مثال :

إذا كانت A مصفوفة ذات أبعاد  $3 \times 3$  فإن عبارة :

$$30 \text{ MAT } B = \text{INV}(A)$$

ستحسب مقلوب المصفوفة A وتضعه في المصفوفة B (وهي مصفوفة أخرى ذات أبعاد  $3 \times 3$ ).

هنالك بالطبع تعليقات أخرى خاصة بالمصفوفات، وهذه تختلف من جهاز لآخر، وما تعرضنا له هنا هو أهم التعليقات.

## ٨ - الدوال :FUNCTIONS

هنالك العديد من العمليات التي يكثر استخدامها في البرامج، وقد يتطلب حسابها أو إجرائها كتابة عدد من التعليقات، لذلك فقد تم تخزين هذه العمليات ضمن مترجم اللغة، وذلك لتسهيل كتابة البرامج. هذه التعليقات تعرف بالدوال، ويتم استخدامها في البرنامج عن طريق استدعائها.

لاستدعاء دالة معينة في البرنامج فإنك تكتب اسمها (والذي يتكون عادة من ثلاثة أحرف)، ثم التعبير الذي تريد إجراء العملية عليه بين قوسين. من أكثر الدوال استخداماً دالة الجذر التربيعي، واسمها SQR، فمثلاً إذا أردنا أن نحسب الجذر التربيعي للرقم 64 وطباعته فإننا نكتب :

```
10 D = SQR (64)
```

```
20 PRINT D
```

أو مباشرة :

```
10 PRINT SQR (64)
```

ويمكن للتعبير أن يكون متغيراً مثل :

```
30 V = SQR(P)
```

أو تعبيراً حسابياً مثل :

```
10 PRINT SQR (T - N + 1)
```

هنالك العديد من هذه الدوال تختلف من جهاز لآخر، بعضها دوال رقمية، وبعضها حرفية، وبعضها خاص بحساب المثلثات، مثل : الظل والجيب . . . إلخ. ولمعرفة الدوال الموجودة في أى جهاز ينبغي الرجوع للوثائق الخاصة بذلك الجهاز (ملحق رقم ١٢).

## ٩ - دوال المبرمج :

بإمكان المبرمج أن يعرف دوال خاصة به ، غير تلك التى توفرها اللغة .

### تعريف الدالة :

لتعريف أى دالة فإنك تكتب عبارة DEF ثم اسم الدالة ، والذي يتركب من ثلاثة أحرف ، الحرفان الأولان منها هما FN ثم أى حرف آخر .

### أمثلة :

FNA

FND

FNX

بعد ذلك تعبير الدالة بين قوسين ثم علامة = ثم التعبير المطلوب إسناده كمحصلة للدالة .

$$20 \text{ DEF FNA}(X) = X * 3$$

هذه الدالة تكون محصلتها رفع قيمة المتغير X إلى القوة 3 ، علماً بأن المتغير X هنا يدل على أى متغير رقمى ، ولا علاقة لاسمه بالاسم الذى سوف تستدعى به الدالة كما سنرى .

### استدعاء الدالة :

لاستدعاء الدالة فإنك تذكر اسمها ، ثم التعبير بين قوسين ، وعندها يتم التعويض عن X فى الدالة بالمتغير .

### مثال :

إذا كان لدينا الدالة السابقة فمن الممكن استدعاؤها كالآتى :

50 PRINT FNA (5)

وعندها سيتم طباعة الرقم 125 وهو عبارة عن 5 مرفوعة للقوة 3 .

أو يمكن أن نكتب الآتى :

40 N = 3

50 C = FNA (N)

أما هنا فإن المتغير C سيأخذ قيمة المتغير N مرفوعاً للقوة 3 وهى 27 .

### مثال :

```
10 DEF FNK ( S) = S ** ( 1/3)
20 P = 216
30 PRINT FNK ( P)
40 END
```

العبارة بالسطر 10 دالة تقوم بحساب الجذر التكعيبي . السطر 30 يستدعي الدالة بتعويض المتغير P بدلاً عن S وحيث إن قيمة P تساوي 216 فسيتم حساب وطباعة الجذر التكعيبي للرقم 216 وهو 6 .  
يمكن للدالة أن تأخذ أكثر من متغير واحد .

### مثال :

```
10 DEF FNR ( J, K, L) = ( J + K + L) /3
```

هذه الدالة محصلتها متوسط ثلاث قيم ، ويمكن استخدامها لاستخراج المتوسط لأي ثلاثة أرقام كالآتي :

```
10 DEF FNR( J, K, L) = ( J + K + L) /3
20 A = 7
30 B = 2
40 C = 6
50 D = FNR ( A, B, C)
```

المتغير D في السطر 50 سيأخذ القيمة 5 وهي محصلة الدالة FNR وهي جمع القيم الثلاث وقسمتها على 3 كما في تعريف الدالة في السطر 10 .

### ١٠ - عبارات إخراج متقدمة :

كما رأينا فإن استخدام الفاصلة كفاصل بين العناصر في عبارة PRINT يجعل المخرجات مفرقة في مناطق محددة ، كما أن الفاصلة المنقوطة تضم العناصر بعضها مع بعض . قد يحتاج المبرمج أحياناً إلى أن تكون المخرجات بشكل يحدده هو بمرونة أكثر مما هو موجود باستخدام الفاصلة والفاصلة المنقوطة . لتحقيق هذا الهدف هنالك طريقتان هما :

```
PRINT TAB
PRINT USING
```

### عبارة PRINT TAB :

باستخدام TAB في أمر PRINT يمكن للمبرمج أن يحدد في أى عمود من السطر يريد أن يظهر كل عنصر من عناصره .

### مثال :

```
20 N $ = 'MEAN = '
30 PRINT TAB ( 5 ); N$
40 END
```

عند تنفيذ هذا البرنامج ستظهر عبارة MEAN = عند العمود رقم 5 .

عبارة PRINT TAB تتكون من العبارة نفسها، ثم رقم العمود الذى يراد الطباعة عنده، ثم فاصلة أو فاصلة منقوطة، ثم العنصر المراد إظهاره، متغيراً كان أم ثابتاً، رقمياً كان أو حرفياً .

### أمثلة :

```
10 PRINT TAB ( 6 ), A
20 PRINT TAB ( 12 ); B
30 PRINT TAB ( 2 ); 'PROGRAM 5'
40 PRINT TAB ( 30 ), 'TOTAL IS'
```

كما يمكن جمع أكثر من عنصر في عبارة PRINT TAB واحدة، ونحدد لكل عنصر العمود الذى يطبع بدءاً منه .

### مثال :

```
10 A$ = 'FIELD A IS'
20 B$ = 'FIELD B IS'
30 A = 16
40 B = 4
50 PRINT TAB ( 3 ), A$; TAB ( 15 ); A; TAB ( 20 ), B$ ; TAB ( 32 ); B
60 END
```

وعند تنفيذ هذا البرنامج فإنه سيخرج المخرجات التالية :

```

عمود 3      عمود 15      عمود 20      عمود 32
FIELD A IS 16 FIELD B IS 4

```

ولعلك لاحظت أن الأرقام تسبق بفراغ وذلك للإشارة (+ أو -).

#### عبارة PRINT USING :

يمكن عبارة PRINT USING المبرمج من التحكم أكثر في شكل المخرجات، وتتركب العبارة من سطرين : الأول يحتوى على عبارة PRINT USING مع رقم السطر الذى به شكل الطباعة المطلوبة، والثانى يمثل شكل الطباعة المطلوبة، والذى يبدأ بعلامة (:).

#### مثال :

```

10 A = 64
20 PRINT USING 30, A
30 : # #
40 END

```

المقصود هنا فى السطر 20 هو أمر بطباعة قيمة المتغير A باستخدام الشكل الذى فى السطر رقم 30. والسطر رقم 30 يحتوى على علامة : ثم علامتى ## هذه العلامات تمثل كل واحدة منها خانة من المتغير المراد طباعته، رقمياً كان أم حرفياً.

عند تنفيذ هذا البرنامج فإنه سيخرج المخرجات التالية :

64

#### مثال :

```

10 A = 12
20 PRINT USING 30, A, A*A
30 : THE SQUARE OF # # IS # # #
40 END

```

(١) ينبغى الرجوع للوثائق الخاصة بأى جهاز لمعرفة العلامات المستخدمة فى هذه العبارة.

عند تنفيذ هذا البرنامج سيخرج المخرجات التالية :

THE SQUARE OF 12 IS 144

لاحظ كيف أننا جمعنا بين الثوابت والمتغيرات في السطر 30 ولاحظ كذلك أنه عند كتابة أى ثوابت في سطر الشكل، فإنها لا تكون بين علامتى ' ' .  
كذلك يمكن طباعة متغيرات حرفية بنفس عبارة USING :

**مثال :**

```
10 N$ = 'JANUARY'
20 PRINT USING 30, N$
30 : THE FIRST MONTH OF THE YEAR IS # # # # # #
40 END
```

ومخرجات هذا البرنامج ستكون :

THE FIRST MONTH OF THE YEAR IS JANUARY

إذا زادت علامات # عن حجم المتغير المراد طباعته، فلا توجد مشكلة، أما إذا نقصت فستستبدل القيمة المراد طباعتها بعلامة \*.

**مثال :**

```
10 A = 12
20 PRINT USING 30, A, A*A
30 : THE SQUARE OF ## IS ##
40 END
```

RUN

THE SQUARE OF 12 IS:\*\*\*

عبارة PRINT USING يمكن ألا تشتمل على متغيرات أو عناصر، فقط رقم سطر يحتوى على قيمة ثابتة (عنوان مثلاً).

30 PRINT USING 6 0

**مثال :**

60 : EMPLOYEE REPORT

عند تنفيذ السطر 30 فإنه سيتم طباعة القيمة الموجودة في السطر 60 وهى :

EMPLOYEE REPORT

ولعلك لاحظت أن سطر الشكل لا يتبع بالضرورة السطر الذى يستدعيه (وهذا منطقى ، لأن نفس السطر يمكن أن يستدعى من عدة مناطق فى البرنامج).

يمكن أن تحتوى القيم الرقمية على خانات عشرية ، وفى هذه الحالة فإن الرقم فى سطر الشكل يتم توصيفه مع وضع الفاصلة العشرية ( . ) فى المكان المناسب.

10 P = 55

**مثال :**

20 PRINT USING 30, P, SQR ( P)

30 : THE SQUARE ROOT OF ##IS #.###

40 END

ومخرجات هذا البرنامج ستكون :

THE SQUARE ROOT OF 55 IS 7.412

**١١ - البرامج الفرعية SUBROUTINES :**

البرنامج الفرعى هو جزء من برنامج بيسك ، يتم تعريفه فى مكان ما من البرنامج ، ويمكن استدعاؤه من عدة أماكن فى البرنامج.

البرنامج قد يحتوى على أكثر من برنامج فرعى ، والبرنامج الفرعى لا يبدأ بأى عبارة معينة ، إلا أنه ينتهى بعبارة RETURN والتى لها الشكل العام التالى :

RETURN رقم السطر

وبما أننا ذكرنا أن البرنامج الفرعى يمكن استدعاؤه من عدة أماكن فى البرنامج ، فعبارة RETURN تعيد التسلسل إلى المكان الذى تم فيه استدعاء البرنامج الفرعى .



استدعاء البرنامج الفرعى يكون بعبارة GOSUB وبعدها يذكر رقم السطر الذى يبدأ فيه البرنامج الفرعى . الشكل العام للتعليمية هو :

رقم سطر      GOSUB      رقم سطر

فيما يلى هيكل لبرنامج ببسك يستخدم برنامجاً فرعياً :

```

10 ..
20 ..
:
40    GOSUB 70
50 ..
60    STOP
70    REM SUBROUTINE FOR ....
80
90
100    RETURN
110 ..
.
.
.
```

بداية البرنامج الفرعى هنا عند السطر 70 والعبارات من 70 إلى 90 تمثل العبارات الخاصة بالبرنامج الفرعى . عبارة RETURN عند السطر 100 تمثل نهاية البرنامج الفرعى . يتم استدعاء البرنامج الفرعى عند السطر 40 بعبارة GOSUB .

لعلك لاحظت وجود عبارة STOP عند السطر 60 هذه تمثل النهاية المنطقية للبرنامج ، وليس من الضرورة أن ينتهى البرنامج بعبارة END (إذ أن هذه العبارة - كما قدمنا - تدل على النهاية المادية للبرنامج) .

فى العادة يكتب البرنامج الفرعى أو البرامج الفرعية فى آخر البرنامج ، ويتم استدعاؤها فى الجزء العلوى للبرنامج ، وفى هذه الحالة لا بد من وجود عبارة STOP أو أمر GOTO إلى سطر به عبارة END فى نهاية البرنامج .

### مثال :

البرنامج التالي مكتوب بطريقة البرامج الفرعية، وهو يقوم بقراءة أسماء عشرة طلاب، ودرجات كل منهم في 3 اختبارات، ومن ثم يحسب المجموع والمعدل لكل طالب ويطبع كل البيانات.

```

10 REM برنامج لقراءة أسماء ودرجات 10 طلاب في 3 اختبارات
20 REM وحساب مجموع ومعدل كل منهم وطباعة البرنامج
30 REM SUBROUTINE الفرعية
40 DIM N$(10),A(10),B(10),C(10),T(10),V(10)
50 PRINT USING 400
60 PRINT USING 410
70 STOP
80 GOSUB 100
90 GOSUB 200
100 GOSUB 300
110 STOP
120 FOR I=1 TO 10
130 READ N$(I),A(I),B(I),C(I) REM الاسم والدرجات الثلاث
140 NEXT I
150 RETURN
160 FOR I=1 TO 10
170 T(I)=A(I)+B(I)+C(I) REM المجموع
180 V(I)=T(I)/3 REM المعدل
190 NEXT I
200 RETURN
210 FOR I=1 TO 10
220 PRINT USING 500,V(I),T(I),C(I),B(I),A(I),N$(I),I
230 PRINT USING 510
240 NEXT I
250 RETURN
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350
360
370
380
390
400
410
420
430
440
450
460
470
480
490
500
510
520
530
540
550
560
570
580
590
600
610
620
630
640
650
660
670
680
690
700
710
720
730
740
750
760
770
780
790
800
810
820
830
840
850
860
870
880
890
900
910
920
930
940
950
960
970
980
990
END

```

### المخرجات

م	الاسم	درجة 1	درجة 2	درجة 3	مجموع	معدل
1	حسن صالح	82	91	88	261	87.00
2	صلاح العفاس	75	72	76	223	74.33
3	عبد العزيز علي	80	82	85	247	82.33
4	سالم فارس	81	75	88	244	81.33
5	احمد العيسى	65	52	60	177	59.00
6	محمد الحميدان	90	88	86	264	88.00
7	كمال ابوراس	89	91	93	273	91.00
8	قمر حسن	75	76	80	231	77.00
9	جمال عثمان	85	84	88	257	85.67
10	طلال الناجي	89	91	93	273	91.00

## تمارين

(١) القائمة التالية تحتوى على متغيرات رقمية وحرفية، بعضها خطأ . المطلوب تحديد المتغيرات الصحيحة ونوعها - (رقمى، حرفى) - والمتغيرات الخطأ والسبب :

1 - Y3	2 - E\$	3 - \$#	4 - R + 9
5 - DD	6 - R 8	7 - 'B5'	8 - X
9 - SA	10 - NM		

(٢) اكتب عبارات LET للمعادلات الجبرية التالية :

- 1 -  $J = (a/b) + 3$
- 2 -  $L = L / (M + 8)$
- 3 -  $C = (P + Q) (R - V)^2$
- 4 -  $X = 5Y - 2$
- 5 -  $Z = X^2 + Y^2$

(٣) اكتب عبارات PRINT للآتى :

- ١ - اطبع العبارة CORRECT ANSWER فى العمود الأول.
  - ٢ - اطبع الرقم 5 فى المنطقة الأولى، والرقم 6 فى المنطقة الثانية.
  - ٣ - اطبع السطرين التاليين باعتبار أن 16 و 36 هما قيمتا المتغيرين A و B على التوالى :
- THE FIRST ANSWER IS 16  
THE SECOND ANSWER IS 36

(٤) اكتب العبارتين فى السؤال (٣) ولكن فى سطر واحد كالآتى :

ANSWER 1 IS 16 WHILE ANSWER 2 IS 36

(٥) بافتراض أن قيمة X هى 3 وقيمة Y هى 15 اطبع ناتج ضرب الرقمين كالآتى :

THE MULTIPLE OF 3 AND 15 IS 45

٦) أوجد الخطأ في الأجزاء التالية من البرامج :

```

1 - 50 INPUT XY
2 - 20 INPUT A B C
3 - 10 INPUT C, D, E
    ? 5 9 33
4 - 60 INPUT J, K
    ? 84
5 - 80 INPUT M, N$
    ? ALI, 36
6 - 40 READ A, B, C
    50 DATA 169,32
7 - 20 DATA 135, ZAID
    30 READ A$, B
8 - 50 DATA 39, 50
    60 READ J, K, L
9 - DATA 6, 3
    20 READ X, Y
10 - 10 READ 8
    20 DATA 7
    
```

٧) اكتب كلاً من البرامج التالية بطريقتين : الأولى باستخدام أمر INPUT والثانية باستخدام READ.

- ١ - اكتب برنامجاً لقراءة رقمين، ثم طباعة مجموعهما.
- ٢ - اكتب برنامجاً لقراءة ثلاثة أرقام، وطباعة مجموعها ومتوسطها.
- ٣ - اكتب برنامجاً لقراءة رقم يمثل المسافة وآخر يمثل الزمن ومن ثم طباعة السرعة.
- ٤ - اكتب برنامجاً لتحويل أى عدد من الأميال إلى ما يقابله بالكيلومترات، علماً بأن الميل =  $\frac{9}{5}$  كيلومتر.
- ٥ - اكتب برنامجاً لقراءة ثلاثة أرقام، وطباعتها، وطباعة مربعها.

٨) أوجد الخطأ في العبارات التالية :

```

1- 60 IF N$ = NO THEN 30
2- 40 IF A+J = 6 GOTO 70
3- 30 IF K=L+1 THEN GOTO 10
4- 40 GOTO 20 IF C = 9
5- 10 FOR I = 5 TO 1
6- 20 FOR J = 1 TO 20
    30 K = K+J
    40 PRINT K
    50 END
7- 30 FOR F$ = 1 TO 7
8- 10 FOR K = 1 TO 5
    20 INPUT X
    30 IF X>99 THEN 10
    40 NEXT K
9- 70 NEXT 30
10- FOR J = 5 TO 10 STEP - 1

```

- ٩) اكتب برنامجاً لقراءة رقمين K, I ثم طباعة الرقم الأكبر أولاً ، ثم الرقم الأصغر.  
 ١٠) اكتب برنامجاً لقراءة 10 أرقام وطباعة الأرقام الموجبة فقط .  
 ١١) اكتب برنامجاً لقراءة 25 رقماً تمثل أعمار طلاب في أحد الفصول ، ثم طباعة العمر الأكبر.  
 ١٢) اكتب البرنامج في السؤال (١١) ، ولكن طباعة العمر الأصغر.

١٣) أوجد الخطأ في العبارات التالية :

```

1- 30 DIM X,Y, Z (25)
2- 50 DIM N1 (15)
3- 90 DIM K
4- 30 DIM F (I,J)
5- 10 DIM T (3,2)
    20 READ T (2)

```

- ١٤) اكتب عبارة DIM لحجز 15 خانة لنسق يمثل عدد سكان 15 مدينة .  
 ١٥) اكتب عبارة DIM لحجز نسق يمثل أسماء 20 عاصمة .

١٦) اكتب عبارة DIM لحجز نسق ذى بعدين ، يمثل مبيعات 4 أفرع لإحدى الشركات خلال 12 شهراً .

١٧) اكتب برنامجاً لقراءة بيانات تمثل درجات 20 طالباً في 4 اختبارات ، ثم حساب وطباعة المعدل لكل طالب ، وطباعة المعدل العام .

١٨) اكتب برنامجاً لقراءة مصفوفة X وهي  $3 \times 4$  ثم طباعة مجموع كل صف (لاستخدم عبارات MAT) .

١٩) اكتب البرنامج ١٨ ولكن مع طباعة كل عمود .

٢٠) اكتب المطلوب في البرنامجين (١٨) ، (١٩) معاً في برنامج واحد ، وباستخدام عبارات MAT .

٢١) البرامج التالية تحتوى على أخطاء ، حددها :

- 1 -    10    INPUT X,Y  
          20    IF X> Y THEN 50  
          30    PRINT \*\*\*  
          40    STOP  
          50    PRINT Y\*Y  
          60    RETURN  
          70    END
  
- 2 -    10    INPUT K, L  
          20    IF K + L > 5 GOSUB 70  
          30    PRINT K, L  
          40    GOTO 10  
          50    END
  
- 3 -    10    INPUT M  
          20    GOSUB  
          30    PRINT M + 1  
          40    GOTO 10  
          50    PRINT M\*M  
          60    END

٢٢) اكتب برنامجاً بطريقة البرامج الفرعية للآتى :  
إحدى المحلات الكبرى لديها برنامج خصم لزبائنها حسب قيمة مشترياتهم كالآتى :

قيمة المشتريات	نسبة الخصم
أقل من 100	لا يوجد
100 - 299	3%
300 - 499	5%
500 - 799	8%
800 فأكثر	12%

المطلوب قراءة البيانات التالية لكل زبون :

- رقم الزبون .
- إجمالى قيمة المبيعات .

ومن ثم حساب الخصم لكل زبون ، وطباعة تقرير يشتمل على :

- رقم الزبون .
- إجمالى قيمة المبيعات .
- قيمة الخصم .
- صافى القيمة المدفوعة .

وفى نهاية البرنامج اطبع :

- إجمالى المبيعات .
- إجمالى الخصم .
- إجمالى الصافى .

اكتب البيانات لـ 20 زبوناً .

- ٢٣) تعرف على الأخطاء في الأجزاء التالية من البرامج :
- 1 - 10 A = 6  
20 B = 8  
30 PRINT X, TAB (9), Y  
40 END
  - 2 - 10 N\$ = 'WRONG'  
20 PRINT ANSWER FOR Q. Z IS' TAB (6); N\$  
30 END
  - 3 - 10 A = 65  
20 B = 94  
30 C = 283  
40 PRINT USING 50, A, B, C  
50 : ## ###  
60 END
  - 4 - 10 X = 3  
20 Y = 5  
30 PRINT USING 40, X, Y  
40 ## ##  
50 END
  - 5 - 10 READ J, K  
20 L = J\*K  
30 PRINT USING 50, J, K, L  
40 DATA 13, 19  
50 : 'MULTIPLE OF'; J; 'A N D'; K; 'IS' L  
60 END
  - 6 - 10 READ M, N  
20 DATA 66, 55  
30 PRINT USING 40, M, N, M\*N  
40 : ## ## ###  
50 END



٢٤) ماذا ستكون مخرجات كل من البرامج التالية :

- 1 - 10 DEF FNC (A) = A\*\*3 + 2 \* A\*\*2 - 3\*A + 4  
20 T = 4  
30 PRINT FNC (T)  
40 END
- 2 - 10 DEF FND (Y) = Y/3 + /2 + Y  
20 X = 18  
30 PRINT FND (X) + 1  
40 END
- 3 - 10 DEF FNN (P,Q) = P\*\*2 + Q\*\*2  
20 J = 3  
30 K = J + 4  
40 R = FNN (J,K)  
50 PRINT R  
60 END
- 4 - 10 DEF FNY (S, T, U) = SQR (S\*\*2 + T\*\*2 + U\*\*2)  
20 A = 6  
30 B = 7  
40 C = 8  
50 D = FNY (A, B, C)  
60 PRINT D  
70 END

٢٥) اكتب تعاريف دوال (DEF FN) للآتي :

- ١ - المجموع الكلي لرقم ، ومربعه ومكعبه .
- ٢ - المتوسط لثلاثة أرقام .
- ٣ - محيط الدائرة بدلالة نصف القطر .
- ٤ - مساحة الدائرة بدلالة نصف القطر .

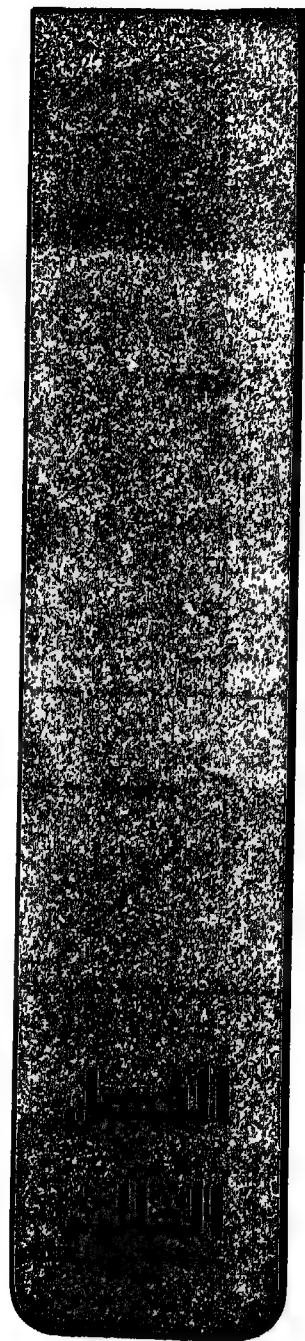
$$T = \frac{(P/Q) + (R/S)}{2} \quad \text{٥ - قيمة المعادلة}$$



---

**التوزيعات التكرارية  
لبيانات العينة**

---



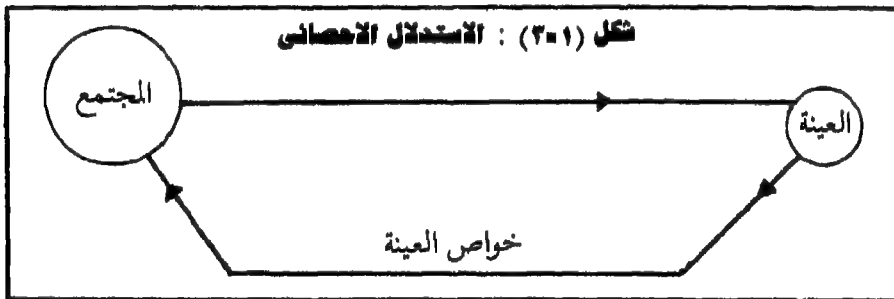


## التوزيعات التكرارية لبيانات العينة



### ١- المقدمة :

تسمى جميع نتائج التجربة الإحصائية بمجتمع النتائج (المجتمع) أو البيانات ، وأى جزء من هذه البيانات يسمى ببيانات العينة ، وبيانات العينة هي المشاهدات (المتغيرات) التى يمكن دراستها وتحليلها لمعرفة خواص المجتمع المعنى بالدراسة . ومن هنا جاء مفهوم الاستدلال الإحصائى (Statistical Inference) الذى يتكون من مجموعة الاستنتاجات الخاصة بالمجتمع الإحصائى ، وتعتمد هذه الاستنتاجات فى جملتها على المعلومات التى استخلصت من بيانات العينة .



إذاً فالمشكلة الأساسية هي معرفة خواص العينة للوصول لخواص المجتمع الذى سحبته منه العينة .

يختلف نوع ومستوى دقة الخواص المستخرجة باختلاف صفات البيانات ، والنموذج الملائم للتطبيق ، فقد يستطيع المحلل فى بعض الحالات تحديد ذلك النموذج بناء على معلومات نظرية ، أو قياساً على حالات تجريبية مشابهة . ويصبح كل المطلوب فى هذه الحالة هو استخدام البيانات ، لتقدير المعالم الخاصة بالعينة والمجتمع - كالوسط الحسابى والانحراف المعياري اللذين سيرد ذكرهما فيما بعد .

بيد أن المحلل في كثير من الحالات لا يستطيع تحديد النموذج الملائم مسبقاً، لعدم توفر معلومات نظرية ، أو حالات تطبيقية تلائم البيانات التي بين يديه تماماً. إذاً فلا بد من استخدام هذه البيانات لتحديد الخواص الأساسية لأفضل النماذج كمرحلة أولية في تحليل البيانات. وهذا هو الهدف من هذا الفصل.

## ٢ - أنواع البيانات :

تنقسم البيانات إلى نوعين، هما : البيانات الكمية (QUANTITATIVE) ، والبيانات الوصفية أو النوعية (QUALITATIVE) . فالبيانات الوصفية هي التي تصنف البيانات إلى صفات معينة، كالجنسيات، والمناطق، والحالة الاجتماعية، والحالة الوظيفية.

مثال (١، ٣) :

## مثال لبيانات وصفية :

الجدول التالي يوضح النسب المئوية للمشتغلين الذين تبلغ أجورهم الأسبوعية ٧٠٠ ريال فأكثر داخل كل مجموعة من مجموعات المهن في المؤسسات الخاصة\*.

مجموعات المهن	الرياض		جدة		الدمام	
	سعوديون	غير سعوديين	سعوديون	غير سعوديين	سعوديون	غير سعوديين
المهن الفنية والعلمية	٦١,٤	٧١,٧	٦٤,٣	٦٣,٧	٧٥,٤	٥٠,٥
رؤساء وأعضاء المجالس والمديرون	٩٨,٠	٩٥,٥	٩٥,٩	٨٨,٢	٩٤,٤	٨٦,٩
الأعمال الكتابية	٤١,٦	٤٧,٣	٤٥,٦	٤١,٦	٦١,١	٣٩,٢
القائمون بأعمال البيع والشراء	٤٨,٢	٤١,١	٥٦,٥	٥١,٩	٦٤,٠	٤٨,٦
المشتغلون بالخدمات	٤,٢	٣,٧	٥,٩	٢,٥	١,٨	٢,١
وسائل النقل	٣٧,١	١١,٣	١٩,١	٩,٢	٤,٤	٧,١
المجموع	٤١,٣	٢٢,٩	٣٨,١	٢١,٠	٤٩,٠	١٧,٤

\* المصدر : إحصاء التوظيف ومستويات الأجور في المؤسسات الخاصة ، مصلحة الإحصاءات العامة - وزارة المالية والاقتصاد الوطنى  
- مطابع الشرق الأوسط - رجب ١٤٠٠ هـ ، صفحة (١٩).

أما البيانات الكمية فهي التي يمكن تقسيمها إلى مجموعات أو فئات متقاربة القيم .  
والبيانات الكمية تكون أحد نوعين، هما : البيانات المتصلة ، أو المستمرة (Continuous)  
والبيانات المنفصلة أو الوثابة (Discrete). فالبيانات الوثابة هي التي قد تختلف الوثبة فيها بين  
كل قراءة وأخرى، وهي لا تأخذ إلا قيماً معينة فقط، ولا يسمح لها بأخذ أى قيمة جديدة،  
بخلاف القيم المعينة. وتكون البيانات الوثابة عادة عبارة عن أعداد صحيحة، مثل عدد  
الأفراد، أو المؤسسات، أو الكتب، أو السيارات، أو الألوان .

وأما البيانات المستمرة فهي التي يمكن أن تأخذ أى قيمة خلال أى فترة أو مدى، أى لا  
توجد قيود عليها، ومثال ذلك البيانات الخاصة بالزمن، أو الطول، أو الوزن . ولتوضيح الفرق  
بين البيانات الوثابة والمستمرة يمكن اعتبار ظاهرة إقلاع أو هبوط الطائرات بأنها أحداث وثابة  
خلال فترة زمنية متصلة .

كذلك تعتبر الأهداف أثناء المباراة، أو حوادث المرور، كلها ظواهر وثابة أثناء فترات زمنية  
متصلة . ويعتبر التمييز بين البيانات الوثابة والمستمرة أمراً هاماً عند معالجة أى بيانات .

هذا وتنقسم البيانات المستمرة والوثابة إلى قسمين آخرين، وهما : البيانات المرتبة (Or-  
dered) والبيانات غير المرتبة، فالبيانات الخاصة بالأسعار لسلعة معينة، أو كميات المخزون  
بين يوم وآخر، أو درجات الحرارة أو البيانات الخاصة بمراقبة الإنتاج الصناعى، تعتبر من  
البيانات المرتبة لأن الترتيب الزمنى هام، لأنه يحتوى على معلومات أساسية لا غنى عنها .

ومن جهة أخرى، فإن بيانات العينة الخاصة بأعمار أو أوزان أو درجات الامتحانات لبعض  
الطلاب لا تحتاج لترتيب؛ إذ ليس من الضروري اختيار الأشخاص بترتيب معين . ومثل هذه  
البيانات تحتاج لمجهود أكبر لتنظيمها، وهذا ما سوف يتم عرضه فى الأجزاء اللاحقة من هذا  
الفصل .

### ٣ - تبويب البيانات الوصفية البسيطة :

عرفت البيانات الوصفية على أنها البيانات التي يمكن تصنيفها تحت صفات معينة،  
كالجنسيات أو المهن . لذلك فإن أول عمل يتم لتبويب البيانات الوصفية هو حصر تلك  
الصفات فى شكل عمودى .

يبدأ تفريغ البيانات بتسجيل العلامات، والعلامة هي خط عمودى لكل حالة، وتحزم كل  
أربع علامات (حالات) بالعلامة التي تمثل الحالة الخامسة أفقياً، وذلك لتسهيل عملية العد  
اليدوى . أما العمود الثالث المبين فى المثال التالى فهو الخاص بتسجيل أعداد العلامات. فهي  
إذاً عدد تكرار الحالات لكل صفة . لذلك فهي تسمى التكرارات (ك<sub>ر</sub>)، فتكرار المجموعة

هو عدد المتغيرات في نفس المجموعة، أما النمط الذي تم بموجبه توزيع التكرارات فيطلق عليه اسم التوزيع التكرارى.

**مثال (٢، ٣) :**

البيانات التالية توضح مدى اعتماد الرؤساء في ٣٠ وحدة تخطيطية\* على مرؤوسيهـم . ولقد كانت الإجابات على النحو الآتى :

أحياناً	كثيراً	كثيراً
كثيراً	كثيراً	أحياناً
كثيراً	أحياناً	كثيراً
نادرأ	كثيراً	نادرأ
أحياناً	أحياناً	كثيراً
كثيراً	كثيراً	نادرأ
كثيراً	أحياناً	كثيراً
كثيراً	كثيراً	أحياناً
كثيراً	كثيراً	كثيراً
أحياناً	كثيراً	كثيراً

يبدأ التوبوب بحصر الصفات في العمود الأول، كما هو موضح فيما يلى ، يليه الحزم ثم التكرار.

التردد (ك)	التوزيع (الحزم)	درجة الاعتماد (الصفة)
١٩		كثيراً
٨		أحياناً
٣		نادرأ
٣٠		المجموع

\*المصدر : د. عل عبدالحفيظ : دور وحدات التخطيط في الأجهزة الحكومية في المملكة العربية السعودية - معهد الإدارة العامة - الرياض - ١٤٠٤ هـ صفحة (٧٤).



يعتبر المجموع للتكرارات هو أول الخطوات الهامة التي تلى عملية الجدولة ، وذلك بهدف التأكد من أن هذا المجموع يساوى عدد المتغيرات ، ولاستخداماته لاستخراج بعض المؤشرات الأساسية التي سيرد ذكرها فيما بعد ، هذا ويمكن اعتبار جدول التوزيع التكرارى هو المكون من العمود الأول والعمود الأخير الخاص بالتكرارات .

معنى ذلك أن الجدول التكرارى البسيط يتكون من عدد من الصفوف (ص) مساوٍ لعدد الصفات وعمود واحد يمثل التكرارات ، لذا يمكن كتابته على النحو (ص × ١) .

أما إذا كان عدد الأعمدة (ع) أكثر من واحد ، فيكون الجدول على النحو ص × ع وهو ما يسمى بالجدول التكرارى المزدوج ، وأصغر جدول مزدوج هو ٢ × ٢ وهو ما يسمى بجدول الاقتران . والمثال التالى يوضح جدولاً للاقتران .

مثال (٣, ٣) : جدول الاقتران

المجموع	أمى	متعلم	الحالة التعليمية
			الجنس
٣٠	١١	١٩	سيدات
٣١	٤	٢٧	رجال
٦١	١٥	٤٦	المجموع

ويسمى المجموع الأفقى مع الحالة التعليمية بالتوزيع الهامشى (Marginal Distribution) للحالة التعليمية ، بينما يسمى المجموع الرأسى مع الجنس بالتوزيع الهامشى للجنس .

#### ٤ - تبويب البيانات الكمية :

تم اختيار عينة عشوائية من مرتكبي حوادث المرور في إحدى الفترات فكانت أعمار أفراد العينة البالغ عددهم ١٥٠ فرداً على النحو التالي :

٢٦	٣١	٣١	٣٢	٣٨	٤١	٣٠	٣١
٣٣	٣٢	٣٨	٣١	٢٢	٣١	٣١	٢٩
٣١	٤٢	٣٣	٣١	٣٥	٣١	٣١	٣٦
٣٣	٣٥	٣١	٣٤	٣٠	٣٣	٣٣	٤٠
٣١	٢٦	٣٣	٣٢	٣٠	٣٢	٢٠	٢٦
٣٣	٣١	٢٣	٢٦	١٥	٣٢	٢٩	٣٤
٢٢	٣٥	٣٠	٣٩	٣٢	٢٨	٢٨	٢٦
٣٥	٥٠	٣٢	٤٢	٣١	٣٦	٢٨	٣١
٣١	٢٩	٣٥	٣٥	٣١	٣٢	٣٢	٣١
٣٨	٣٣	٣٥	٣٠	٣٨	٢٥	٤١	٣١
	٣٢	٣٥	١٣	٣١	٣١	٣٥	٣٦
	٤٦	٢٩	٣٣	٣٣	٢٨	٣٣	٢٦
	٣٤	٢٦	١٩	٣١	٤٤	٢٩	٣١
	٣٠	٢٨	٣٤	٣٤	٢٧	٣٠	٢٢
	٢٣	٣٤	٣٦	٣٢	٢٦	٤١	١٦
	٣٤	٣٦	٣٢	٣٠	٣١	١٨	٣٣
	٢٩	٣٣	٣١	١٩	٢٦	٣٨	٣١
	٢٧	٣٢	٢٥	١٩	٢٨	٣٥	٣٥
	٣٠	٣٢	٣١	٤٤	٣٢	٣٤	٣١
	١٦	٣١	٥٠	٣٢	٢٧	٣٠	٣٣

ولعله من الصعب جداً تحديد أهم خصائص توزيع هذه البيانات بدقة بمجرد النظر إليها. وبما أن الإحصاء علم يهتم بالمجموعات أكثر من اهتمامه بالمفردات، لذا فمن الجائز تلخيص هذه البيانات في مجموعات متقاربة؛ ليتم عرضها بيانياً، ولتوضيح أهم خواص توزيعها الإحصائي، كذلك يمكن استخدام البيانات الملخصة (المبوبة) لتقدير أهم المؤثرات الإحصائية. إذاً فالهدف العام من تلخيص البيانات في مجموعات هو استخراج المعلومات الأساسية الخاصة بالتوزيع الإحصائي للبيانات.

إن أول خطوة لتحديد المجموعات هي إيجاد المدى الذي يعرف بأنه الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة. يقسم المدى إلى أقسام تكون في أكثر الحالات متساوية تسمى المجموعات أو

الفئات، ويسمى ناتج قسمة المدى (م) على عدد الفئات (ع) بطول الفئة (ط). وطول الفئة هو طول الخطوة التي يجب أن تخطوها من بداية الفئة (المجموعة) حتى نهايتها.

أى أن :

$$ط = \frac{م + 1}{ع}$$

وقد استبدلت قيمة م بالقيمة (م + 1)؛ لأن المدى الحقيقى أكبر من (م) بزيادة واحدة، لأنه يضم أكبر وأصغر قيمة معاً.

دعنا نتوقف الآن قليلاً لتأمل البرنامج التالى، والذي يقوم بتحديد القيمة العظمى، والقيمة الصغرى لمجموعة من القيم.

```

10  REM برنامج لتحديد القيمة العظمى والقيمة الصغرى من مجموعة قيم
20  REM عدد القيم
30  READ N
40  READ X
50  PRINT 'القيم:'
60  PRINT
70  PRINT X
80  H=X REM القيمة العظمى
90  L=X REM القيمة الصغرى
100 FOR I=1 TO N-1
110  READ X
120  PRINT X
130  IF X>H THEN H=X
140  IF X<L THEN L=X
150 NEXT I
160 PRINT
170 PRINT 'القيمة العظمى=H:'
180 PRINT 'القيمة الصغرى=L:'
190 DATA 20,7,48,66,3,9,5,15,82,4,70,27,49,85,45,7,26,27,53,66,30
200 END

```

المخرجات

القيم

7  
48  
66  
3  
9  
5  
15  
82  
4  
70  
27  
49  
85  
45  
7  
26  
27  
53  
66  
30

85 = القيمة العظمى  
3 = القيمة الصغرى

لاستخدام هذا البرنامج لمجموعة مختلفة من البيانات، فإنك فقط تتأكد أن عدد القيم هو نفسه الموجود في المتغير N في البرنامج، وإلا فإنك تدخل القيمة التي تريدها. وبعد ذلك بالطبع لابد من تغيير البيانات الموجودة في عبارة DATA بالبيانات الجديدة.

#### (٤ = ١) تحديد عدد الفئات وأطوالها

عند تكوين الجداول التكرارية في جميع الحالات لكي تحقق البيانات المبوبة الهدف الذي أنشئت من أجله، يجب ملاحظة ما يلي :

١ - ألا يكون عدد الفئات كبيراً، فتقترب البيانات المبوبة من المفردات ويفقد التلخيص أهميته. كذلك يجب ألا يكون عدد الفئات صغيراً، فيفقد التوزيع التكرارى الكثير من تفاصيله الهامة، وذلك بوضع قيم متباعدة (متباينة) في مجموعة واحدة.

وبما أن طول الفئة يزداد بنقصان عدد الفئات، فقد أثبتت الحالات التطبيقية أن أفضل عدد (ع) للفئات هو الذى يتراوح بين ١٠ و ١٥ فئة ( $١٠ \leq ع \leq ١٥$ ). وقد يزيد أو ينقص بخمس فئات إذا دعت الضرورة. ويعتبر عدد الفئات صغيراً جداً إذا قل عن خمس فئات، وكبيراً جداً إذا زاد على العشرين فئة.

٢ - العدد الفردى للفئات أفضل من العدد الزوجى، أما الطول الزوجى للفئات فأفضل من الفردى.

٣ - يجب تحديد الفئات بحيث تكون البيانات الخام متمركزة حول نقطة الوسط لكل فئة. ونقطة الوسط تسمى مركز الفئة، وهى عبارة عن متوسط الحد الأدنى والحد الأعلى لكل فئة.

٤ - يفضل أن يكون الحد الأدنى، وكذلك الحد الأعلى، للفئة عدداً صحيحاً خالياً من الكسور، إذا كان الطول زوجياً. أما إذا كان الطول فردياً، فيفضل أن يحتوى كل حد على ٥، ٠ وذلك بهدف جعل مراكز الفئات أعداداً صحيحة خالية من الكسور في جميع الحالات.

٥ - يفضل أن تكون أطوال الفئات متساوية، فالأطوال غير المتساوية تعوق عمليتى العرض البياني للتوزيعات، واستخراج بعض المؤشرات ومقارنة متغيرات المجموعات المختلفة. إلا أن ذلك قد تحتتمه بعض الظروف العملية، خاصة إذا احتوت البيانات على بعض الفراغات.

٦ - يفضل عدم استخدام الفئات المفتوحة، وهى الفئات التى لا يكون لها حد أدنى للفئة الأولى، أو حد أعلى للفئة الأخيرة؛ ذلك لأن هذه الفئات تجعل مهمة العرض البياني

أكثر صعوبة، وتقلل من عدد المؤشرات الهامة. بل إن أهم المؤشرات لا يمكن استخراجها، ما دامت هناك بعض الفئات المفتوحة، إلا أن الضرورة قد تفرض استخدام هذا النوع من الفئات، فالبيانات الخاصة بالأعمار أو الدخل يصعب تحديد سقف لها في بعض الحالات.

#### (٤ = ٢) طريقة ستيرقس (Sturges)

تتلخص طريقة ستيرقس لتحديد أنسب طول للفئة (ط) في المعادلة التالية :

$$ط = \frac{\text{المدى}}{١,٣٢٢ \times \sqrt{ن}}$$

حيث ن هي عدد المتغيرات المعنية بالدراسة، أى مجموع التكرارات. فلتحديد طول الفئة للبيانات السالفة الذكر والخاصة بالأعمار يتضح أن :

$$ط = \frac{١٣ - ٥٠}{١,٣٢٢ \times \sqrt{١٥٠}} = ٤,٥$$

أى أن طول الفئة ٤ أو ٥. فإذا كان طول الفئة ٤ فعدد الفئات

$$ع = \frac{٣٧}{٤} \therefore ع = ١٠$$

أما إذا كان الطول ٥ فعدد الفئات يساوى

$$\frac{٣٧}{٥} = ٨ \text{ تقريباً.}$$

إلا أن نظرية ستيرقس ليست ملزمة في جميع الحالات، ولكنها تعطي مؤشراً مناسباً لطول الفئة، وعدد الفئات في كل حالة. ويلاحظ هنا أن حاصل ضرب عدد الفئات في الطول يكون أكبر من المدى؛ لذا يمكن تسميته بالمدى النظرى. فالمدى النظرى في الحالة الأولى يساوى ٤٠، وكذلك في الحالة الثانية (٨ × ٥)، لذلك يفضل اختيار أصغر مدى نظرى ممكن؛ لتقليل الفرق (الفراغ) بقدر الإمكان.



**مثال (٤, ٣) :**

كون جدول توزيع تكرارى للبيانات الخاصة بأعمار مرتكبى حوادث المرور خلال إحدى الفترات الزمنية .

**الحل :**

$$(١) \text{ المدى} = ٥٠ - ١٣$$

$$= ٣٧$$

(٢) ورد من قبل أن أفضل عدد للفئات يتراوح بين ١٠ — ١٥ فئة .

والجدول التالى يبين الطول، والمدى النظرى فى كل حالة .

المدى النظرى ع × ط	طول الفئة ط = ٣٧ + ع	عدد الفئات (ع)
٤٠	٤	١٠
٤٤	٤	١١
٤٨	٤	١٢
٣٩	٣	١٣
٤٢	٣	١٤
٤٥	٣	١٥

يتضح من الجدول السابق أن أصغر مدى نظرى هو ٣٩ وهو يقابل ١٣ فئة، طول كل منها ٣ . ولا يعنى ذلك أن هذا هو أفضل اختيار، فلقد اتضح من طريقة ستيرقس أنه بالإمكان استخدام ١٠ فئات طول كل منها ٤، أو ٨ فئات طول كل منها ٥ . كما أن النواحي العملية قد تغلب على النظرية فيحدد طول الفئة وعدد الفئات مسبقاً .

يتميز اختيار ١٣ فئة بأنه عدد فردى، إلا أن الطول الفردى غير مرغوب فيه كما ورد من قبل . أما الفراغ وهو الفرق بين المدى النظرى والمدى (٣٩ - ٣٧ = ٢) فيجب أن يترك كله أو جزء منه للفئة الأخيرة . لذا فقد وقع الاختيار هنا على ترك ٠,٥ للبداية والباقى (١,٥) للفئة الأخيرة . ولقد تم تقسيم الفراغ على هذا النحو بسبب الطول الفردى (٣) لتبدأ الفئة الأولى من ١٣ - ٠,٥ = ١٢,٥

وتنتهى الفئة الأخيرة فى :

$$٥٠ + ١,٥ = ٥١,٥$$

والجدول التالى يوضح الفئات والعلامات والتكرارات :

التكرار (ك)	العلامات (التفريغ)	الفئة
٢		١٥,٥ - ١٢,٥
٣		١٨,٥ - ١٥,٥
٤		٢١,٥ - ١٨,٥
٥		٢٤,٥ - ٢١,٥
١٤		٢٧,٥ - ٢٤,٥
٢١		٣٠,٥ - ٢٧,٥
٥٩		٣٣,٥ - ٣٠,٥
٢٤		٣٦,٥ - ٣٣,٥
٧		٣٩,٥ - ٣٦,٥
٦		٤٢,٥ - ٣٩,٥
٢		٤٥,٥ - ٤٢,٥
١		٤٨,٥ - ٤٥,٥
٢		٥١,٥ - ٤٨,٥
١٥٠	المجموع	

البرنامج التالى يقوم بتفريغ وتبويب البيانات بافتراض أن الفئات معلومة، علماً بأنه سبق إعداد برنامج لتحديد القيمة الصغرى والقيمة العظمى والمدى، حيث يمكن استخدام ذلك البرنامج أو البرنامج الخاص بطريقة ستيرقس، لتحديد الفئات :





**مثال (٣, ٥) :**

توزيع تكرارى وثاب

الفئة	التكرار (ك <sub>ر</sub> )
٧-٣	١
١٢-٨	٣
١٧-١٣	٦
٢٢-١٨	٤
٢٩-٢٥	١
المجموع	١٥

يعرف طول الفئة في حالة المجموعات المستمرة بأنه الفرق بين الحد الأعلى والحد الأدنى لنفس الفئة، بينما يعرف بأنه نفس ذلك الفرق مضافاً إليه واحد في حالة الجداول الوثابة، أما مركز الفئة فهو الحد الأدنى للفئة مضافاً إليه نصف طولها. وتمثل مراكز الفئات متوالية حسابية فرقتها (أساسها) مساوٍ لطول الفئة في حالة الأطوال المتساوية للفئات المستمرة، أو الوثابة ذات الوثبات الثابتة.

**مثال (٣, ٦) :**

استخدم الجدول التكرارى التالى لإيجاد مراكز الفئات، وناتج ضرب كل مركز فئة في التكرار المقابل، ومجموع التكرارات، ومجموع ناتج الضرب. والجدول هو :

المجموعات	التكرار (ك <sub>ر</sub> )
١٠-٦	٣
١٤-١٠	٧
١٨-١٤	١٥
٢٢-١٨	١٠
٢٦-٢٢	١

## الحل :

المجموعات	ك ر	مراكز الفئات س ر	نتائج الضرب س ر × ك ر
١٠ - ٦	٣	٨	٠٢٤
١٤ - ١٠	٧	١٢	٠٨٤
١٨ - ١٤	١٥	١٦	٢٤٠
٢٢ - ١٨	١٠	٢٠	٢٠٠
٢٦ - ٢٢	١	٢٤	٠٢٤
المجموع ( $\Sigma$ )	٣٦		٥٧٢

## ٥ - التجمع التكرارى :

يحتاج الشخص أحياناً لتجميع التكرارات تجميعاً تراكمياً من طرف إلى آخر؛ للإجابة على أحد السؤالين التاليين :

- كم عدد المتغيرات التى تقل عن الحد الأعلى لفئة معينة؟

- كم عدد المتغيرات التى تزيد على الحد الأدنى لفئة معينة؟

ويستخدم التجمع التكرارى الصاعد للإجابة عن السؤال الأول، بينما يستخدم التجمع التكرارى النازل (الهابط) للإجابة عن السؤال الثانى. ويمكن الحصول على التجمع الصاعد إذا جمعت التكرارات من الفئة الأولى (الصغرى) إلى الفئة الأخيرة (العليا)، بينما تبدأ عملية الجمع التراكمى بطريقة عكسية فى حالة التجمع التكرارى الهابط.

## مثال (٣، ٧) :

استخدم الجدول التكرارى الخاص بالمثال (٤) لتكوين جدول تجمع صاعد وجدول تجمع هابط، ثم أوجد الفرق بين التجمع الصاعد والهابط عند كل فئة، وأوجد عدد مرتكبى الحوادث الذين تزيد أعمارهم على ٣٦، ٥ سنة، وكذلك عدد الذين تقل أعمارهم عن ٣٦، ٥ سنة.

## الحل :

الفرق الصاعد - الهابط	التجمع التكرارى الهابط (أكثر من الحد الأدنى)	التجمع التكرارى الصاعد (أقل من الحد الأعلى)	التكرار (ك ر)	الفئة
١٤٨ -	١٥٠	٢	٢	١٥,٥ - ١٢,٥
١٤٣ -	١٤٨	٥	٣	١٨,٥ - ١٥,٥
١٣٦ -	١٤٥	٩	٤	٢١,٥ - ١٨,٥
١٢٧ -	١٤١	١٤	٥	٢٤,٥ - ٢١,٥
١٠٨ -	١٣٦	٢٨	١٤	٢٧,٥ - ٢٤,٥
٧٣ -	١٢٢	٤٩	٢١	٣٠,٥ - ٢٧,٥
٧	١٠١	١٠٨	٥٩	٣٣,٥ - ٣٠,٥
٩٠	٤٢	١٣٢	٢٤	٣٦,٥ - ٣٣,٥
١٢١	١٨	١٣٩	٧	٣٩,٥ - ٣٦,٥
١٣٤	١١	١٤٥	٦	٤٢,٥ - ٣٩,٥
١٤٢	٥	١٤٧	٢	٤٥,٥ - ٤٢,٥
١٤٥	٣	١٤٨	١	٤٨,٥ - ٤٥,٥
١٤٨	٢	١٥٠	٢	٥١,٥ - ٤٨,٥
			١٥٠	المجموع

١ - عدد الذين تزيد أعمارهم على ٣٦,٥ = ١٨ شخصاً.

٢ - عدد الذين تقل أعمارهم عن ٣٦,٥ = ١٣٢ شخصاً.

تسمى نقطة تقاطع التجمع التكرارى الصاعد مع التجمع التكرارى الهابط بالوسيط. هذا ويكون الوسيط في الفئة التي يكون الفرق بين التجمعين عندها أقل ما يمكن، لذلك تسمى هذه الفئة بالفئة الوسيطة. إذاً فالفئة ٣٠,٥ - ٣٣,٥ هي الفئة الوسيطة.

البرنامج التالى يقوم بحساب التجمع التكرارى الصاعد والتجمع التكرارى الهابط، وقد صمم البرنامج، شأنه شأن كل البرامج، بطريقة عامة، أى أن البرنامج يصلح لأى مجموعة مختلفة من البيانات فقط بتغيير قيمة N والبيانات فى عبارة DATA.

```

10 REM          البرنامج لحساب التجمع النكراري المعاد والمبايط
20 DIM A(13), B(13), C(13), D(13), E(13), F(13)
30 PRINT USING 250
40 PRINT USING 230
50 PRINT USING 240
60 PRINT USING 250
70 PRINT
75 F1=0
80 READ N      REM NO OF OBSERVATIONS
90 FOR I=1 TO N
100  READ A(I), B(I), F(I)  REM الحد الأدنى، الحد الأعلى والتكرار
110  F1=F1+F(I)
120 NEXT I
130 C(1)=F(1)
140 D(1)=F(1)
150 FOR I=2 TO N
160  C(I)=C(I-1)+F(I)
170  D(I)=D(I-1)-F(I-1)
180 NEXT I
190 FOR I=1 TO N
200  E(I)=C(I)-D(I)
210  PRINT USING 260, E(I), D(I), C(I), F(I), B(I), A(I)
220 NEXT I
230 PRINT
240 PRINT
250 PRINT
260 PRINT
270 PRINT
280 PRINT
290 PRINT
300 END

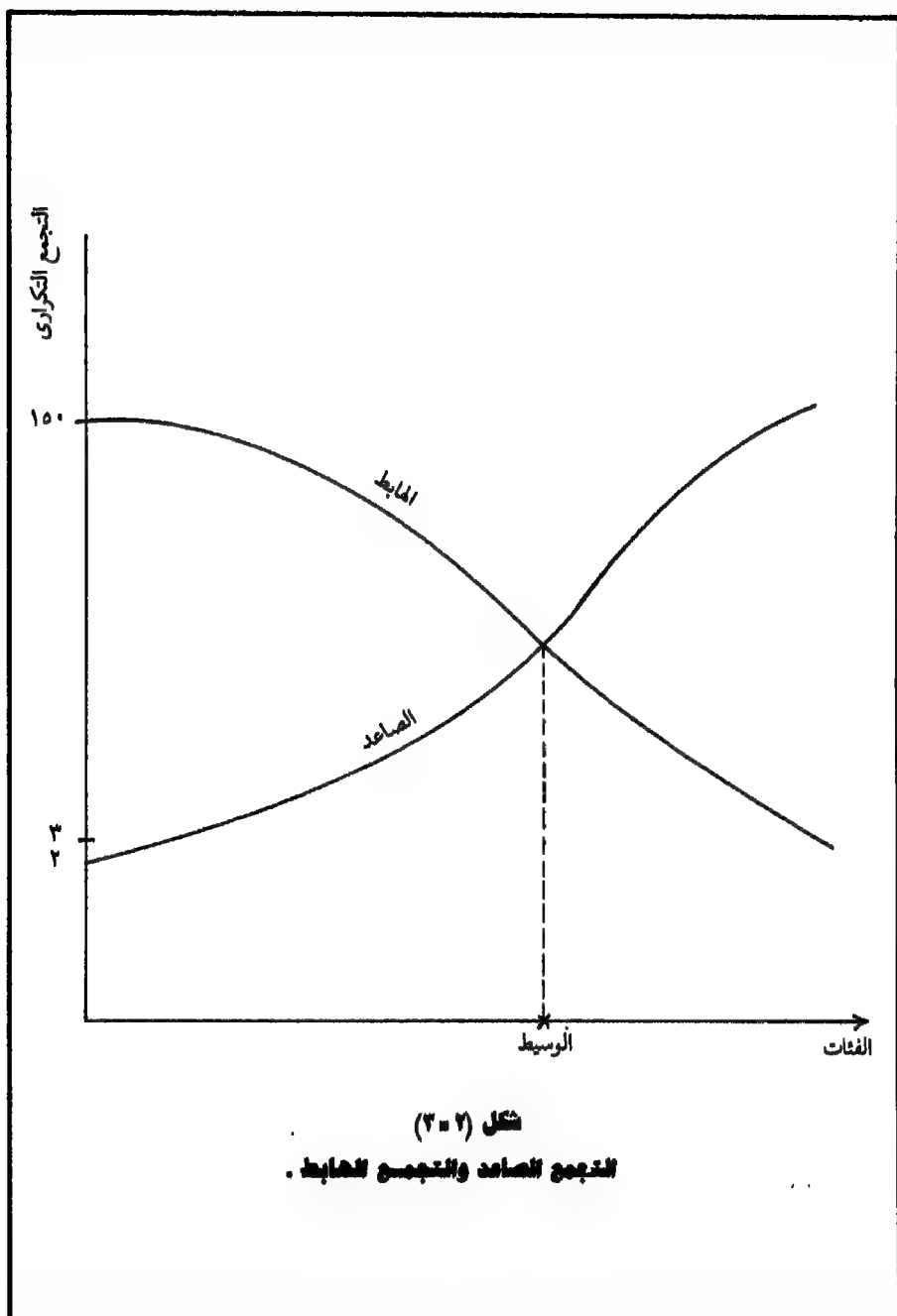
```

الفرق      التجمع نكراري      التجمع نكراري      التكرار      المعاد

الفرق	التجمع نكراري	التجمع نكراري	التكرار	المعاد
13.1	150	150	2	150
14.5	145	145	2	145
13.6	141	141	5	141
12.7	135	135	28	135
10.8	122	122	49	122
7.3	101	101	108	101
9.0	42	42	132	42
12.1	18	18	139	18
14.4	1	1	145	1
14.2	5	5	147	5
14.5	2	2	148	2
14.8	2	2	150	2

### المخرجات

الفرق	التجمع نكراري	التجمع نكراري	التكرار	المعاد
-14.8	150	2	2	150
-14.5	145	2	2	145
-13.6	141	5	5	141
-12.7	135	28	28	135
-10.8	122	49	49	122
-7.3	101	108	108	101
9.0	42	132	132	42
12.1	18	139	139	18
14.4	1	145	145	1
14.2	5	147	147	5
14.5	2	148	148	2
14.8	2	150	150	2



## ٦ - العرض البياني :

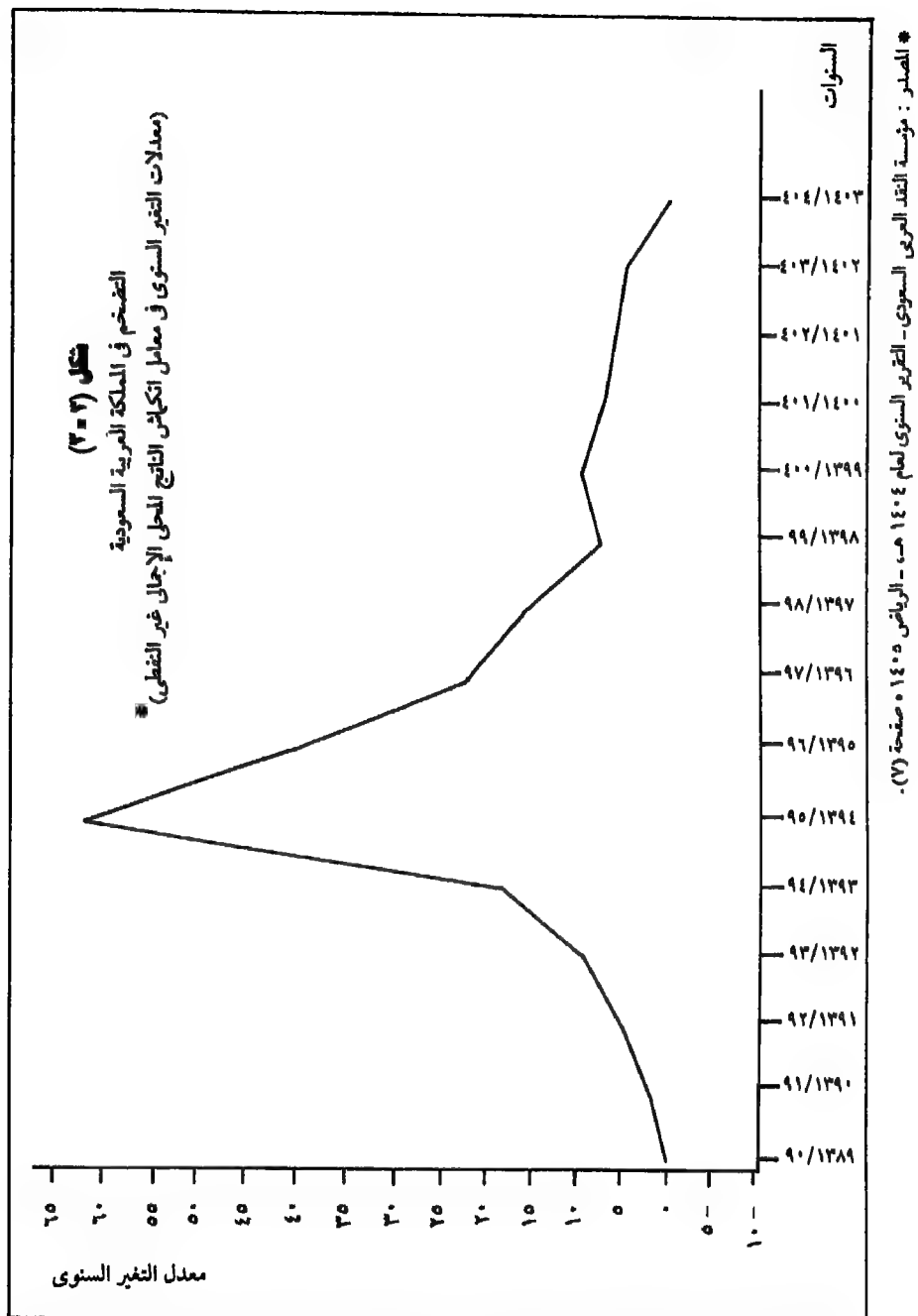
يهدف العرض البياني إلى إعطاء صورة أوضح للتوزيع التكراري للمتغيرات ، ومن ثم معرفة الاتجاه العام للمتغيرات . وقد يكون الرسم البياني خطياً أو عمودياً أو دائرياً أو مجسداً ، وسوف يتم استعراض الأنواع الثلاثة الأولى لأنها الأكثر استخداماً .

### (١٦) الرسم البياني الخطي :

يستخدم الرسم البياني الخطي سواء على أوراق حسابية (Arithmetic) أو أوراق لوغاريتمية (Logarithmic) أو نسبية ، وذلك بهدف توضيح التغيرات المطلقة (الزيادة أو النقصان) ، ومن ثم تحديد الاتجاهات العامة . لذلك يكثر استخدام الرسم البياني الخطي لقياس التغيرات من وقت إلى آخر (السلاسل الزمنية) ، سواء في مجالات الأسعار أو الدخل أو المبيعات ، وهو أبسط وأسهل أنواع الرسم البياني ، ويمكن استخدامه للبيانات المستمرة والوثابة .

### مثال (٣، ٨) :

يوضح الرسم البياني الخطي التالي التضخم (معدلات التغير السنوي في معامل الانكماش) في المملكة العربية السعودية خلال الفترة ١٣٩٤ / ١٣٩٥ - ١٤٠٣ / ١٤٠٤ هـ .



\* المصدر : مؤسسة النقد العربي السعودي - التقرير السنوى لعام ١٤٠٤ هـ - الرياض ١٤٠٥ هـ - صفحة (٧).



## (٦ = ٢) الرسم البياني العمودي :

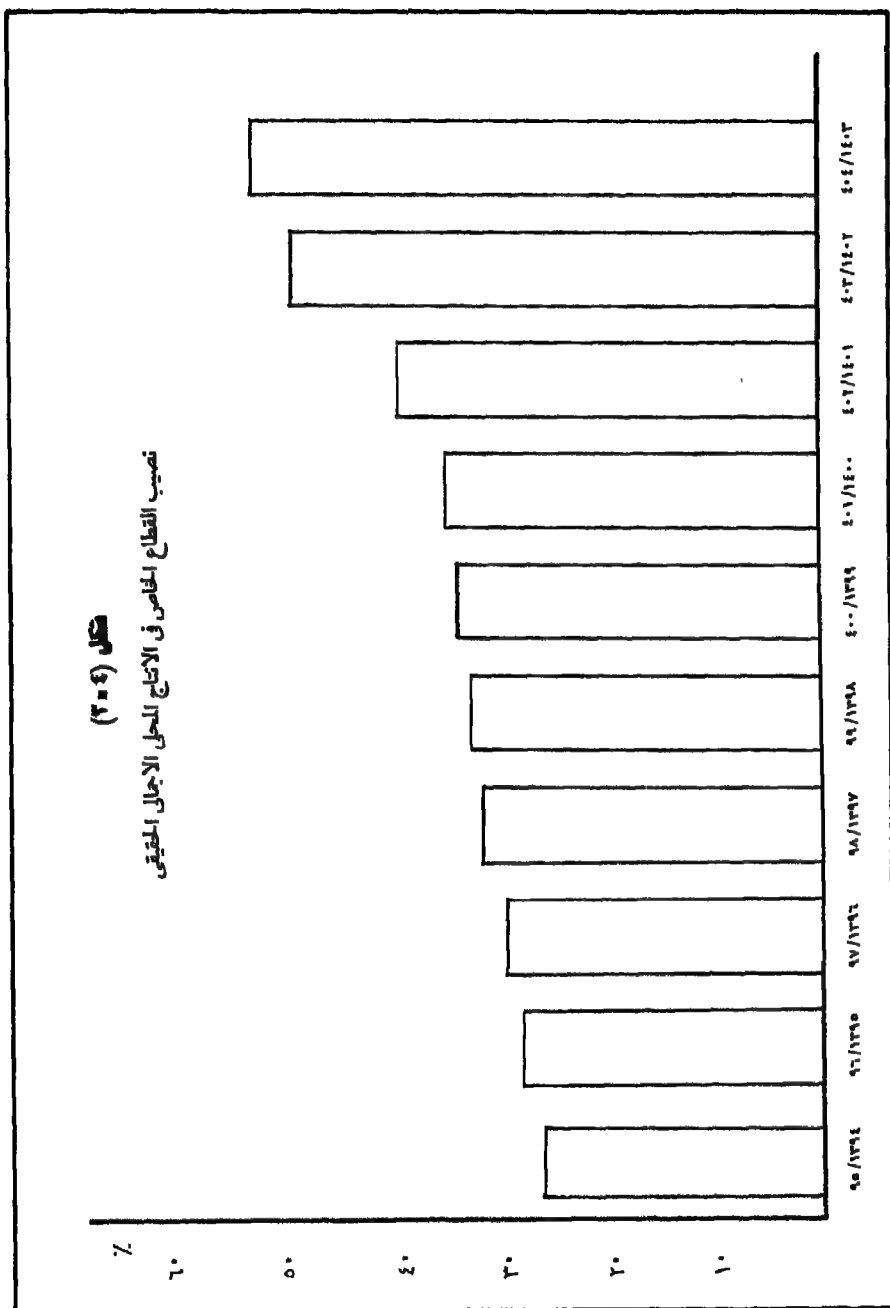
وهو إما أن يكون رأسياً، أو أفقياً، أو مزدوجاً. ويعتبر النوع الأول أكثر استخداماً من الآخرين، إذ تكون الفئات على المحور الأفقي (السيني)، وتكون التكرارات على المحور الرأسى (الصادى)، بينما تسجل مراكز الفئات بمراكز الأعمدة. هذا ويجب أن تكون الأعمدة متساوية العرض مع ضرورة تساوى المسافات بينها. أما إذا اعتبرت التكرارات عبارة عن إحداثيات خاصة بمراكز الفئات، وتم توصيلها فيسمى الرسم البياني الناتج بالمضلع التكرارى.

## مثال (٩، ٣) :

يوضح الرسم البياني التالى نصيب القطاع الخاص فى الإنتاج المحلى الإجمالى الحقيقى خلال الفترة ١٣٩٤/١٣٩٥ - ١٤٠٣/١٤٠٤ هـ\* .

---

(\*) المصدر : نفس المصدر السابق ، صفحة ٢٣ .



### (٣ = ٦) الرسم البياني الدائري :

يستخدم الرسم البياني الدائري لتوضيح المقادير النسبية ، ويمثل العدد الكلي للدرجات (٣٦٠ درجة) بنسبة ١٠٠٪ ، وبحسب القطاع لكل متغير بنسبة مقداره إلى المقدار الكلي ، أي أن زاوية القطاع تساوي النسبة المئوية مضروبة في ٣٦٠ .

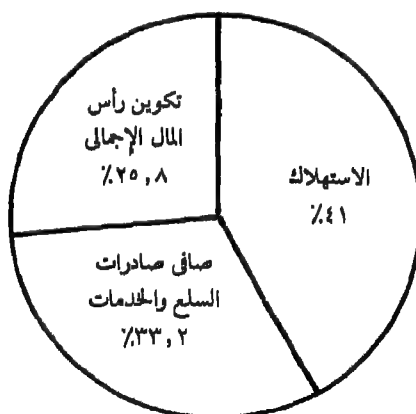
### مثال (٣، ١٠) :

يوضح الجدول التالي والرسم البياني الدائري الانفاق على الانتاج المحلي الاجمالي بالمملكة العربية السعودية خلال عام ١٣٩٩ / ١٤٠٠ هـ\* .

النصيب المئوي	القيمة	المصدر
٤١	١٥٨٣٩٢	الاستهلاك
٢٥,٨	٩٩٨٤٦	تكوين رأس المال الاجمالي
٣٣,٢	١٢٨٢١٥	صافي صادرات السلع والخدمات
١٠٠	٣٨٦٤٥٣	مجموع الانفاق المحلي

\* المصدر : مؤسسة النقد السعودي - التقرير السنوي لعام ١٤٠١ هـ (١٩٨١م) ، الرياض - صفر ١٤٠٢ هـ ، صفحة (١٩) .

### شكل (٣ = ٥) رسم بياني دائري :



## تمارين

- ١ - عرّف الفرق بين القيم العينية والمجتمع والعلاقة بينهما.
- ٢ - ما هو الفرق بين البيانات الوصفية والبيانات الكمية؟ وهل يمكن قياس جميع البيانات بنفس نوع القياس؟ ولماذا؟
- ٣ - حدد أنواع القياس التي يمكن استخدامها.
- ٤ - البيانات التالية توضح تقديرات ٥٠ دارساً، والمطلوب عرضها في جدول تكرارى، والبيانات هي :  
 جيد، جيد جداً، جيد جداً، جيد، مقبول، جيد، جيد جداً، مقبول، ممتاز، جيد، جيد، جيد جداً، جيد، ممتاز، جيد، راسب، جيد، جيد، جيد جداً، مقبول، راسب، جيد، مقبول، جيد، ممتاز، جيد، جيد جداً، راسب، جيد، مقبول، جيد، جيد جداً، راسب، مقبول، جيد، جيد جداً، مقبول، جيد، جيد جداً، مقبول، جيد، جيد جداً، راسب، مقبول، جيد جداً.  
 ملحوظة : البيانات أعلاه تسمى بيانات مرحلية (Interval).
- ٥ - استخدم البيانات أعلاه لإيجاد عدد الذين :  
 ١ - نجحوا.  
 ٢ - حصلوا على تقدير جيد على الأقل.  
 ٣ - حصلوا على أقل من جيد جداً.  
 ٤ - حصلوا على أقل من جيد.  
 ٥ - حصلوا على تقدير أعلى من جيد.  
 ٦ - رسبوا.  
 ٧ - حصلوا على تقدير ممتاز.
- ٦ - سئل كل من مائة رياضي عن أحب أنواع الرياضة إلى نفسه، فقام الباحث بترميز الإجابات على النحو الآتي :  
 السباحة = ١  
 كرة القدم = ٢  
 كرة السلة = ٣

الكرة الطائرة = ٤

التنس = ٥

ألعاب القوى = ٦

فكانت النتائج على النحو الآتى :

٥،٣،٢،١،٤،٣،١،٥،٢،٣،٦،٥،١،٢،١،٤،٢،٢،٦،٢،٢،٣  
١،٢،٣،٢،٢،١،٢،٦،٥،٦،١،٢،٣،٤،٢،٤،٢،١،٤،١،٢،٣  
٦،٥،٥،١،٣،٢،٤،٦،١،٣،٢،٢،٢،٦،٢،٢،٤،٣،٦،١،٢،٤  
٤،٣،٣،٤،٢،١،١،٦،٢،٥،٢،٤،٣،٢،١،١،٢،١،٣،٢،٤،٢  
١،٢،١،١،٣،٤،٦،٢،٥،١،٢،٢

البيانات أعلاه تسمى بيانات اسمية (Nominal) .

والمطلوب هو :

أ - إعداد جدول تكرارى .

ب - رسم بيانى دائرى .

ج - رسم بيانى عمودى .

٧ - قامت إحدى شركات تسويق الشاى باستقصاء عينة من الزبائن قوامها ٦٠ شخصاً عن

آرائهم فى مستوى أحد الأنواع على أن تكون الإجابة بين الصفر والأربعة، وذلك باعتبار

أن الصفر يعنى أن مستوى الشاى سىء جداً، بينما تعنى الأربعة أن المستوى ممتاز،

فكانت الإجابات على النحو الآتى :

٢،٣،٣،٢،٠،٢،٣،٤،٢،١،١،١،٣،٢،٣،٤،٠،٣،٢،١،٣،٢،٤،٣  
٢،٣،٤،٢،١،٢،٣،٣،٤،٣،٢،٣،٢،٣،٤،٠،١،٢،٣،٠،٣،٠،١،٤  
٣،١،٢،٣،١،١،٤،٢،٣،٠،٠،٣

(ملحوظة : يسمى هذا النوع من البيانات بالبيانات التسلسلية [ORDINAL] ) .

والمطلوب هو :

١ - إعداد جدول تكرارى .

٢ - عدد الذين كانت تقديراتهم ٣ فما فوق .

٣ - عدد الذين كانت تقديراتهم أقل من ٣ .

٤ - بكم تقدر عدد الذين يعتقدون أن مستوى هذا النوع من الشاى ممتاز، إذا كان عدد

المستهلكين يساوى ٢، ١ مليون شخص .

٥ - ارسم رسماً بيانياً عمودياً للبيانات .

٦ - ارسم رسماً بيانياً دائرياً للبيانات .

٨ - البيانات التالية توضح أسعار بعض المواد التي أخذت كعينة من أحد المحلات التجارية :

٣٦	٥٤	٧٠	١١٦	٥٣
٣٨	١٣٩	١٧٦	٩٨	٧٠
١٣٧	٧٧	١٦١	١٠٢	٦٧
٨١	٩٣	٥٦	١٣٣	٩٣
٥٤	٨٨	١٨٥	١٣١	٨١
١٠٩	٦٠	٨٣	٩٢	٨٦
٥٧	٣٥	١١٧	٢٤	٩٥
٧٩	٨١	١٧١	١٩	١٠٦
١٣٦	١١٠	٥٥	٥٩	١٠٥

(ملحوظة : البيانات أعلاه تسمى بيانات نسبية [RATIO] )

المطلوب هو :

١ - المدى .

٢ - استخدم طريقة ستيرقس لتحديد عدد الفئات وطول كل فئة .

٣ - جدول تكرارى مناسب .

٤ - جدول تكرارى بحيث يكون الحد الأدنى للفئة الأولى صفراً والحد الأعلى للفئة الأخيرة ٢٠٠ ، وعدد الفئات ثمانية .

٥ - استخدم الجدول التكرارى فى (٣) لإيجاد جدول متجمع صاعد وآخر هابط ، وحدد الفئة الوسيطة .

٦ - استخدم الجدول التكرارى فى (٤) لإيجاد جدول متجمع صاعد وآخر هابط وحدد الفئة الوسيطة .

٧ - قارن الجدول فى (٤) بالجدول فى (٣) ووضح أيهما أفضل .

٨ - ارسم الرسومات البيانية التالية :

أ - رسم بيانى خطى للبيانات .

ب - رسم بيانى عمودى .

ج - رسم بيانى دائرى . وذلك اعتماداً على (٤) .

- ٩ - استخدم الأسئلة ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ لتعريف ما يأتى :
- أ - البيانات الاسمية .
  - ب - البيانات التسلسلية .
  - ج - البيانات المرحلية .
  - د - البيانات النسبية .
- ١٠ - باستخدام البيانات الواردة فى السؤال (٨) اكتب برنامج بيسك لحساب الآتى :
- (١) القيمة العظمى .
  - (٢) القيمة الصغرى .
  - (٣) المدى .
  - (٤) أنسب طول للفئة حسب طريقة ستيرقس .
- ١١ - استخدم بيانات الجدول التكرارى فى السؤال (٨) الجزء (٣) واكتب برنامج بيسك لإيجاد التجمع التكرارى الصاعد ، والتجمع التكرارى الهابط ، والفئة الوسيطة .
- ١٢ - اكتب برنامجاً متكاملًا لبيانات السؤال (٨) لإيجاد ما يلى :
- أ - أفضل عدد للفئات وطول الفئة اعتماداً على أصغر مدى نظرى .
  - ب - تبويب وتفرغ البيانات اعتماداً على أفضل طول وعدد للفئات .

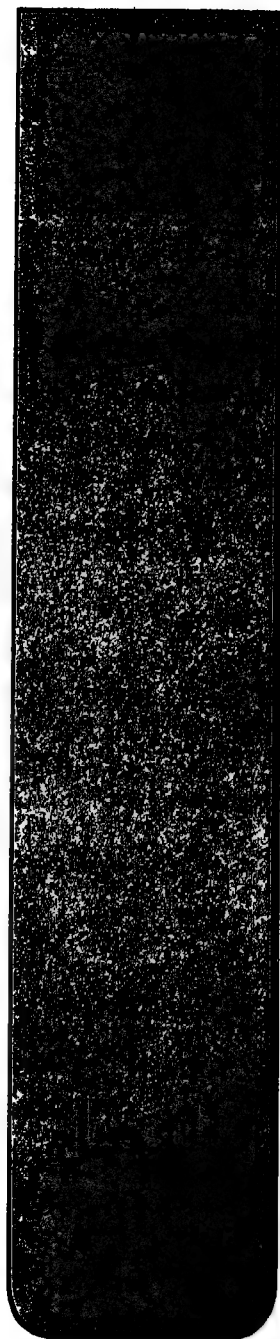




---

## مقاييس النزعة المركزية

---





## مقاييس النزعة المركزية

### Measures of Central Tendency



#### ١. الإحصائية (Statistic) :

تعرف الإحصائية بأنها دالة العناصر (الوحدات) المكونة للعينة والتي لا تعتمد على معالم مجهولة. فالإحصائيات (Statistics) هي كميات يمكن حسابها من واقع قيم المفردات المكونة للعينة التي تم اختيارها، لذا فهي تكون الأساس الذي يركز عليه الاستنتاج الإحصائي أو الوصف الإحصائي للبيانات.

ومقاييس النزعة المركزية هي المجموعة الأولى من الإحصائيات الخاصة بتحديد معالم التوزيع التكراري للبيانات المبوبة أو المفردات، وسميت هذه المجموعة بمقاييس النزعة المركزية، لأنها تهدف إلى تحديد نقطة معينة تتجمع حولها بقية القيم. وتعتبر هذه النقطة أفضل مثل لمجموعة البيانات التي حُسبت منها؛ لأنها تحمل من صفات المجتمع أكثر مما تحمله أي نقطة أخرى.

هذا وتنقسم مقاييس النزعة المركزية إلى خمسة أنواع، هي :

Arithmetic Mean	١ - الوسط الحسابي
Median	٢ - الوسيط
Mode	٣ - المنوال
Geometric Mean	٤ - الوسط الهندسي
Harmonic Mean	٥ - الوسط التوافقي

## ٢ - الوسط الحسابى (س):

إذا كانت  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  تمثل القيم العينية للمتغير العشوائى  $s$  المكون من  $n$  وحدة، فالوسط الحسابى هو:

$$(1) \quad \bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n}{n}$$

ويستخدم الدليل هنا (١، ٢، ٣، ...) لبيان ترتيب اختيار العنصر، وهذا يعنى أن القيم العينية قد تكون غير مرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً. إذاً  $s_1$  هى القيمة العينية الأولى و  $s_n$  هى القيمة العينية الأخيرة. وقد تكون  $s_1$  مساوية  $s_n$  من حيث القيمة أو أكبر منها أو أصغر منها.

يمكن كتابة المعادلة السابقة بطريقة أفضل بعد إدخال رمز التجميع سيقماً (Σ) وتعميم الرمز (r) الذى لا يكون إلا عدداً صحيحاً يبدأ من الدليل الأول، وينتهى بالدليل الأخير (n) لتصبح المعادلة على النحو الآتى:

$$(2) \quad \bar{s} = \frac{\sum_{r=1}^n s_r}{n}$$

وخلاصة ذلك هى أن الوسط الحسابى هو مجموع القيم العينية مقسوماً على عددها. أما فى حالة التوزيعات التكرارية فتعتبر  $s_r$  هى مركز الفئة ذات التكرار  $r$ . ويكون الوسط الحسابى للبيانات المكونة من (f) فئة هو:

$$(3) \quad \bar{s} = \frac{s_1 k_1 + s_2 k_2 + s_3 k_3 + \dots + s_n k_n}{k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n}$$

وبما أن  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  هى مجموع التكرارات الذى يساوى حجم العينة (n)، فإن المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على النحو الآتى:

$$(4) \quad \bar{s} = \frac{\sum_{r=1}^f s_r k_r}{n}$$

حيث إن f تعنى عدد الفئات.

تستخدم المعادلة (٢) لإيجاد الوسط الحسابي للمفردات بينما تستخدم المعادلة (٤) لإيجاد نفس الإحصائية في حالة البيانات المبوبة. إذاً فناتج المعادلة (٤) هو تقريب للوسط الحسابي الصحيح الذي تعطيه المعادلة (٢)، بيد أن الفرق يكون ضئيلاً جداً، إذا تم التنبؤ بطريقة صحيحة. ويعزى ذلك الفرق إلى افتراض أن جميع التكرارات الخاصة بكل فئة واقعة في منتصفها، أى أن عناصر كل فئة قد استبدلت بعنصر واحد هو منتصف الفئة.

**مثال (٤، ١) :**

أوجد الوسط الحسابي للمفردات التالية :

١٦ ؛ ٢٢ ؛ ٢١ ؛ ٢٠ ؛ ٢٣ ؛ ٢١ ؛ ١٩ ؛ ١٥ ؛ ١٣ ؛ ٢٣ ؛ ١٧ ؛ ٢٠ ؛ ٢٩ ؛ ١٨ ؛ ٢٢ ؛ ٢٥ ؛ ١٦

**الحل :**

$$n = 17$$

$$\sum S_r = 16 + 22 + 21 + 20 + 23 + 21 + 19 + 15 + 13 + 23 + 17 + 20 + 29 + 18 + 22 + 25 + 16 = 340$$

$$\bar{S} = \frac{\sum S_r}{n}$$

$$= \frac{340}{17}$$

$$\therefore \bar{S} = 20$$

البرنامج التالى يقوم بحساب الوسط الحسابي لمجموعة مفردات حسب المعادلة :

$$\bar{S} = \frac{\sum S_r}{n}$$

بمعنى أن :

$$M = \frac{S}{N}$$

N عدد القيم هنا يرمز له بالرمز

S ومجموع المتغيرات بالرمز

M والوسط الحسابي بالرمز

```

10 REM برنامج لحساب الوسط الحسابي لمجموعة مفردات
20 S=0
30 READ N REM عدد القيم
35 PRINT 'البيانات'
40 FOR I=1 TO N
50 READ X
60 PRINT X
70 S=S+X
80 NEXT I
90 PRINT
100 PRINT
110 M=S/N
120 PRINT M, 'الوسط الحسابي'
130 PRINT
140 PRINT
150 DATA 17,16,22,21,20,23,21,19,15,13,23,17,20,29,18,22,16,25
160 END

```

المخرجات

البيانات

```

17
16
22
21
20
23
21
19
15
13
23
17
20
29
18
22
16
25

```

الوسط الحسابي = 20

مثال (٢، ٤)

أوجد الوسط الحسابي للبيانات التالية :

رقم الفئة	الفئات العمرية (بالسنوات)	ك	س	س ر ك
١	١٢,٥ - ١٥,٥	٢	١٤	٢٨
٢	١٥,٥ - ١٨,٥	٣	١٧	٥١
٣	١٨,٥ - ٢١,٥	٤	٢٠	٨٠
٤	٢١,٥ - ٢٤,٥	٥	٢٣	١١٥
٥	٢٤,٥ - ٢٧,٥	١٤	٢٦	٣٦٤
٦	٢٧,٥ - ٣٠,٥	٢١	٢٩	٦٠٩
٧	٣٠,٥ - ٣٣,٥	٥٩	٣٢	١٨٨٨
٨	٣٣,٥ - ٣٦,٥	٢٤	٣٥	٨٤٠
٩	٣٦,٥ - ٣٩,٥	٧	٣٨	٢٦٦
١٠	٣٩,٥ - ٤٢,٥	٦	٤١	٢٤٦
١١	٤٢,٥ - ٤٥,٥	٢	٤٤	٨٨
١٢	٤٥,٥ - ٤٨,٥	١	٤٧	٤٧
١٣	٤٨,٥ - ٥١,٥	٢	٥٠	١٠٠
المجموع		١٥٠		٤٧٢٢

$$(٤) \quad \frac{\sum_{r=1}^{13} \text{سرك ر}}{ن} = \text{س}$$

$$ن = \sum_{r=1}^{13} \text{ك ر}$$

$$150 = \therefore ن$$

$$\frac{4722}{150} = \text{س}$$

$$\text{س} = 31,48 \text{ سنة}$$

البرنامج التالي يقوم بحساب الوسط الحسابي لبيانات مبوبة بطريقة مراكز الفئات، وباستخدام المعادلة :

$$M = \frac{D_1}{F_1}$$

حيث :

M = الوسط الحسابي (س)

$$D_1 = \sum_{l=1}^N C(l) \times F(l)$$

C(l) = مركز الفئة (س)

F(l) = تكرار الفئة (ك)

$$F_l = \sum F(l) = \sum \text{ك ر} = \text{مجموع التكرارات}$$

N = عدد الفئات

```

10 REM برنامج لحساب الوسط الحسابي لبيانات مجمعة
20 DIM A(13),B(13),C(13),D(13),E(13),F(13)
30 F1=0
40 READ N REM NO OF OBSERVATIONS
50 FOR I=1 TO N
60 READ A(I),B(I),F(I) REM الحد الاعلى والتكرار
70 F1=F1+F(I) REM مجموع التكرار
80 C(I)=(A(I)+B(I))/2
90 D(I)=C(I)*F(I)
100 D1=D1+D(I)
110 NEXT I
120 PRINT 'المجموعات'
130 PRINT 'التكرار'
140 PRINT 'مراكز'
150 PRINT 'الناتج'
160 FOR I=1 TO N
170 PRINT USING 190, D(I),C(I),F(I),B(I),A(I)
180 NEXT I
190 PRINT '####'
200 PRINT '####'
210 PRINT '####'
220 PRINT '####'
230 PRINT '####'
240 PRINT '####'
250 PRINT '####'
260 PRINT '####'
270 PRINT '####'
280 PRINT '####'
290 PRINT '####'
300 PRINT '####'
310 PRINT '####'
320 END

```

المخرجات			
المجموعات	التكرار	مراكز	الناتج
15	2	14	28
18	5	17	90
21	1	20	21
24	1	23	24
27	1	26	27
30	1	29	30
33	1	32	33
36	1	35	36
39	1	38	39
42	1	41	42
45	1	44	45
48	1	47	48
51	1	50	51
54	1	53	54
57	1	56	57
60	1	59	60
63	1	62	63
66	1	65	66
69	1	68	69
72	1	71	72
75	1	74	75
78	1	77	78
81	1	80	81
84	1	83	84
87	1	86	87
90	1	89	90
93	1	92	93
96	1	95	96
99	1	98	99
102	1	101	102
105	1	104	105
108	1	107	108
111	1	110	111
114	1	113	114
117	1	116	117
120	1	119	120
123	1	122	123
126	1	125	126
129	1	128	129
132	1	131	132
135	1	134	135
138	1	137	138
141	1	140	141
144	1	143	144
147	1	146	147
150	1	149	150
153	1	152	153
156	1	155	156
159	1	158	159
162	1	161	162
165	1	164	165
168	1	167	168
171	1	170	171
174	1	173	174
177	1	176	177
180	1	179	180
183	1	182	183
186	1	185	186
189	1	188	189
192	1	191	192
195	1	194	195
198	1	197	198
201	1	200	201
204	1	203	204
207	1	206	207
210	1	209	210
213	1	212	213
216	1	215	216
219	1	218	219
222	1	221	222
225	1	224	225
228	1	227	228
231	1	230	231
234	1	233	234
237	1	236	237
240	1	239	240
243	1	242	243
246	1	245	246
249	1	248	249
252	1	251	252
255	1	254	255
258	1	257	258
261	1	260	261
264	1	263	264
267	1	266	267
270	1	269	270
273	1	272	273
276	1	275	276
279	1	278	279
282	1	281	282
285	1	284	285
288	1	287	288
291	1	290	291
294	1	293	294
297	1	296	297
300	1	299	300
303	1	302	303
306	1	305	306
309	1	308	309
312	1	311	312
315	1	314	315
318	1	317	318
321	1	320	321
324	1	323	324
327	1	326	327
330	1	329	330
333	1	332	333
336	1	335	336
339	1	338	339
342	1	341	342
345	1	344	345
348	1	347	348
351	1	350	351
354	1	353	354
357	1	356	357
360	1	359	360
363	1	362	363
366	1	365	366
369	1	368	369
372	1	371	372
375	1	374	375
378	1	377	378
381	1	380	381
384	1	383	384
387	1	386	387
390	1	389	390
393	1	392	393
396	1	395	396
399	1	398	399
402	1	401	402
405	1	404	405
408	1	407	408
411	1	410	411
414	1	413	414
417	1	416	417
420	1	419	420
423	1	422	423
426	1	425	426
429	1	428	429
432	1	431	432
435	1	434	435
438	1	437	438
441	1	440	441
444	1	443	444
447	1	446	447
450	1	449	450
453	1	452	453
456	1	455	456
459	1	458	459
462	1	461	462
465	1	464	465
468	1	467	468
471	1	470	471
474	1	473	474
477	1	476	477
480	1	479	480
483	1	482	483
486	1	485	486
489	1	488	489
492	1	491	492
495	1	494	495
498	1	497	498
501	1	500	501
504	1	503	504
507	1	506	507
510	1	509	510
513	1	512	513
516	1	515	516
519	1	518	519
522	1	521	522
525	1	524	525
528	1	527	528
531	1	530	531
534	1	533	534
537	1	536	537
540	1	539	540
543	1	542	543
546	1	545	546
549	1	548	549
552	1	551	552
555	1	554	555
558	1	557	558
561	1	560	561
564	1	563	564
567	1	566	567
570	1	569	570
573	1	572	573
576	1	575	576
579	1	578	579
582	1	581	582
585	1	584	585
588	1	587	588
591	1	590	591
594	1	593	594
597	1	596	597
600	1	599	600
603	1	602	603
606	1	605	606
609	1	608	609
612	1	611	612
615	1	614	615
618	1	617	618
621	1	620	621
624	1	623	624
627	1	626	627
630	1	629	630
633	1	632	633
636	1	635	636
639	1	638	639
642	1	641	642
645	1	644	645
648	1	647	648
651	1	650	651
654	1	653	654
657	1	656	657
660	1	659	660
663	1	662	663
666	1	665	666
669	1	668	669
672	1	671	672
675	1	674	675
678	1	677	678
681	1	680	681
684	1	683	684
687	1	686	687
690	1	689	690
693	1	692	693
696	1	695	696
699	1	698	699
702	1	701	702
705	1	704	705
708	1	707	708
711	1	710	711
714	1	713	714
717	1	716	717
720	1	719	720
723	1	722	723
726	1	725	726
729	1	728	729
732	1	731	732
735	1	734	735
738	1	737	738
741	1	740	741
744	1	743	744
747	1	746	747
750	1	749	750
753	1	752	753
756	1	755	756
759	1	758	759
762	1	761	762
765	1	764	765
768	1	767	768
771	1	770	771
774	1	773	774
777	1	776	777
780	1	779	780
783	1	782	783
786	1	785	786
789	1	788	789
792	1	791	792
795	1	794	795
798	1	797	798
801	1	800	801
804	1	803	804
807	1	806	807
810	1	809	810
813	1	812	813
816	1	815	816
819	1	818	819
822	1	821	822
825	1	824	825
828	1	827	828
831	1	830	831
834	1	833	834
837	1	836	837
840	1	839	840
843	1	842	843
846	1	845	846
849	1	848	849
852	1	851	852
855	1	854	855
858	1	857	858
861	1	860	861
864	1	863	864
867	1	866	867
870	1	869	870
873	1	872	873
876	1	875	876
879	1	878	879
882	1	881	882
885	1	884	885
888	1	887	888
891	1	890	891
894	1	893	894
897	1	896	897
900	1	899	900
903	1	902	903
906	1	905	906
909	1	908	909
912	1	911	912
915	1	914	915
918	1	917	918
921	1	920	921
924	1	923	924
927	1	926	927
930	1	929	930
933	1	932	933
936	1	935	936
939	1	938	939
942	1	941	942
945	1	944	945
948	1	947	948
951	1	950	951
954	1	953	954
957	1	956	957
960	1	959	960
963	1	962	963
966	1	965	966
969	1	968	969
972	1	971	972
975	1	974	975
978	1	977	978
981	1	980	981
984	1	983	984
987	1	986	987
990	1	989	990
993	1	992	993
996	1	995	996
999	1	998	999
1002	1	999	1002
1005	1	1000	1005
1008	1	1001	1008
1011	1	1002	1011
1014	1	1003	1014
1017	1	1004	1017
1020	1	1005	1020
1023	1	1006	1023
1026	1	1007	1026
1029	1	1008	1029
1032	1	1009	1032
1035	1	1010	1035
1038	1	1011	1038
1041	1	1012	1041
1044	1	1013	1044
1047	1	1014	1047
1050	1	1015	1050
1053	1	1016	1053
1056	1	1017	1056
1059	1	1018	1059
1062	1	1019	1062
1065	1	1020	1065
1068	1	1021	1068
1071	1	1022	1071
1074	1	1023	1074
1077	1	1024	1077
1080	1	1025	1080
1083	1	1026	1083
1086	1	1027	1086
1089	1	1028	1089
1092	1	1029	1092
1095	1	1030	1095
1098			



الجبرية، واستخدام رمز التجميع على أن تكون للوسط الحسابي ثلاث خواص هامة وهى :

١- مجموع انحرافات القيم العينية عن وسطها الحسابي يساوى صفراً.

والانحراف فى الإحصاء يعنى الفرق أو البعد، فإذا كانت القيم هى

$$س_١، س_٢، س_٣، \dots، س_٦$$

فالانحرافات هى  $س_١ - س$ ،  $س_٢ - س$ ،  $س_٣ - س$ ،  $\dots$ ،  $س_٦ - س$

وإذا كان مجموع هذه الانحرافات يساوى صفراً، فهذا يعنى أن :

$$س_١ - س + س_٢ - س + س_٣ - س + \dots + س_٦ - س = ٠$$

وبإدخال رمز التجميع على الجانب الأيمن يصبح :

$$(٥) \quad ٠ = \sum_{r=1}^n (س_r - س) \quad \text{أى أن :}$$

$$٠ = \sum س_r - \sum س$$

$$٠ = \sum س_r - \sum س$$

$$٠ = \sum س_r - \sum س$$

$$(٦) \quad ٠ = \sum س_r - \sum س$$

**مثال (٤، ٣) :**

أوجد الوسط الحسابي للمتغيرات التالية ومجموع انحرافاتهما عن وسطها الحسابي، والمتغيرات هى :

$$١١، ١١، ١٢، ١٣، ١٥، ١٢، ١٠$$

**الحل :**

(٢)

$$\frac{\sum s_r}{n} = \bar{s}$$

$$11 + 11 + 12 + 13 + 15 + 12 + 10 = \sum s_r$$

$$84 =$$

$$7 = n$$

$$\frac{84}{7} = \bar{s}$$

$$12 = \bar{s} \therefore$$

س - س <sub>ر</sub>	س <sub>ر</sub>
٢ -	١٠
٠	١٢
٣	١٥
١	١٣
٠	١٢
١ -	١١
١ -	١١
صفر	٨٤ المجموع

ب - مجموع مربعات الانحرافات للقيم العينية عن وسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات الانحرافات لنفس القيم عن أى نقطة أخرى.

وهذه الخاصية هي التي جعلت الوسط الحسابي يكون أدق وأكفأ مقياس النزعة المركزية.

ومجموع مربعات الانحرافات عن الوسط جبرياً يكون على النحو التالي :

(٧)

$$\sum (s_r - \bar{s})^2$$

وهذه يمكن أن تكون :

$$\sum_{r=1}^n s_r^2 - 2 \sum_{r=1}^n s_r + n s^2 \quad (8) \dots$$

لنأخذ قيمة فرضية أخرى تبعد عن  $s$  بمقدار  $\tau$ . أى أن القيمة الفرضية هي  $s + \tau$  وقد تكون قيمة  $\tau$  موجبة أو سالبة. إذاً فمجموع مربعات الانحرافات عن القيمة الجديدة هي :

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^n (s_r - s - \tau)^2 \\ &= \sum_{r=1}^n (s_r^2 + s^2 + \tau^2 - 2s_r s - 2s_r \tau + 2s\tau) \\ &= \sum_{r=1}^n s_r^2 + n s^2 + n \tau^2 - 2s \sum_{r=1}^n s_r - 2\tau \sum_{r=1}^n s_r + 2s\tau \sum_{r=1}^n 1 \end{aligned}$$

إلا أن

$$\sum_{r=1}^n (s_r - s) = 0$$

وبالتالى :

$$\sum_{r=1}^n (s_r - s - \tau)^2 = \sum_{r=1}^n s_r^2 + n s^2 + n \tau^2 - 2s \sum_{r=1}^n s_r - 2\tau \sum_{r=1}^n s_r + 2s\tau \sum_{r=1}^n 1$$

وهذه تزيد على  $\sum_{r=1}^n (s_r - s)^2$  المبينة في (٨) سابقاً بزيادة  $n \tau^2$ . وهذه القيمة موجبة سواء كانت  $\tau$  موجبة أو سالبة.

**مثال (٤، ٤) :**

استخدم البيانات الواردة في مثال (٣)، وأوجد الفرق بين مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابى، ومجموع مربعات الانحرافات عن قيمة فرضية أخرى مقدارها ١٠ وتحقق أن الفرق بين المجموعين يساوى  $n \tau^2$ .

# الحل :

س <sub>ر</sub>	س <sub>ر</sub> -س <sub>ن</sub>	س <sub>ر</sub> -١٠	س <sub>ر</sub> -س <sub>ن</sub> <sup>٢</sup>	س <sub>ر</sub> -١٠ <sup>٢</sup>
١٠	-٢	٠	٤	٠
١٢	٠	٢	٠	٤
١٥	٣	٥	٩	٢٥
١٣	١	٣	١	٩
١٢	٠	٢	٠	٤
١١	-١	١	١	١
١١	-١	١	١	١
المجموع ٨٤	صفر	١٤	١٦	٤٤

$$س = ١٢$$

$$ن = ٧$$

$$\therefore ط - ١٠ = ١٢ - ١٠$$

$$ط - ٢ =$$

$$ن ط = ٧ \times (٢ - ٢)$$

$$= ٢٨$$

$$\sum (س - ١٠)^٢ - \sum (س - س)^٢ = ٤٤ - ١٦$$

$$= ٢٨$$

$$\therefore \text{الفرق} = ن ط = ٢٨ \quad (٩)$$

ج - يمكن إيجاد الوسط الحسابي من مجموع القيم العينية وعددها، دون الحاجة للتوزيع التكراري أو المفردات.

بما أن

$$\frac{\sum س_r}{ن} = س \quad \text{في حالة المفردات}$$

كما أن

$$\bar{s} = \frac{\sum s_r k_r}{\sum k_r}$$

في حالة التوزيعات التكرارية

لذا أصبح من الممكن إيجاد قيمة  $\bar{s}$  متى كانت  $\sum s_r$  و  $\sum k_r$  مع  $\sum k_r$  معلومة. هذا، وسوف يلاحظ فيما بعد أن بقية مقاييس النزعة المركزية الهامة لا تمتلك هذه الصفة.

لهذه الصفة السهلة البسيطة عدة نتائج جانبية هامة تم اشتقاقها من المعادلة :

$$\sum s_r = n \quad (10)$$

إذ أصبح بالإمكان معرفة مجموع القيم في حالات كثيرة، واستخدمت تلك المجاميع لإيجاد ما يسمى بالوسط الحسابي المرجح، ووسط مجاميع وفروق أزواج القيم المتناظرة.

$$\text{فالوسط الحسابي المرجح} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n}{k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n}$$

أى أن الوسط الحسابي المرجح هو

$$\bar{s} = \frac{\sum_{r=1}^n s_r k_r}{\sum k_r} \quad (11)$$

والذى يشبه الوسط الحسابي في حالة التوزيعات التكرارية، إلا أن  $k_r$  تعنى الوزن أو الأهمية. لذلك يمكن اعتبار الوسط الحسابي في حالة التوزيعات التكرارية، هو عبارة عن وسط حسابي مرجح بالتكرارات. وأكثر الحالات التى يستخدم فيها الوسط الحسابي المرجح هى إيجاد الوسط الحسابي للأسعار المرتبطة بكميات مختلفة عددها (ف).

**مثال (٥، ٤) :**

تقوم إحدى المؤسسات ببيع ثلاثة أنواع من السيارات، فإذا كان سعر السيارة من النوع الأول (ماركة أ) يساوى ٢٥٠٠٠ ريال، والسعر من الماركة (ب) يساوى ٢٣٠٠٠ ريال، وسعر

السيارة من الماركة (جـ) يساوى ١٨٠٠٠ ريال، فأوجد متوسط سعر السيارة، علماً بأن الشركة قد باعت خلال العام الماضى عدد ١٠٠٠ و ١٤٠٠ و ١٦٠٠ سيارة من الماركة (أ) والماركة (ب) والماركة (جـ) على التوالى.

$$\text{الوسط الحسابى غير المرجح هو } \frac{\sum \text{س ر}}{ن}$$

$$= \frac{١٨٠٠٠ + ٢٣٠٠٠ + ٢٥٠٠٠}{٣}$$

$$= ٢٢٠٠٠ \text{ ريال}$$

إلا أن هذا الوسط غير صحيح لأن الكميات المبعة تختلف من نوع إلى آخر، لذلك يجب استخدام الوسط الحسابى المرجح بالكميات على النحو التالى :

$$\text{الوسط الحسابى المرجح} = \frac{١٦٠٠ \times ١٨٠٠٠ + ١٤٠٠ \times ٢٣٠٠٠ + ١٠٠٠ \times ٢٥٠٠٠}{١٦٠٠ + ١٤٠٠ + ١٠٠٠}$$

$$= \frac{٨٦٠٠٠٠٠}{٤٠٠٠}$$

$$= ٢١٥٠٠ \text{ ريال}$$

فيما يلى برنامج لحساب الوسط الحسابى المرجح للبيانات الواردة فى المثال السابق باستخدام المعادلتين :

$$A = \frac{T}{R} \quad , \quad B = \frac{S}{3}$$

حيث :

A = الوسط الحسابى غير المرجح

$$S = \sum_{i=1}^3 P_i$$

P = سعر السيارة

$$T = \sum P_i F_i$$

F = عدد السيارات

$$R = \sum F_i$$

```

10 REM برنامج لحساب الوسط الحسابي المرجح
20 READ P1,F1,P2,F2,P3,F3
30 PRINT 'البيانات'
40 PRINT
50 PRINT ,P1
60 PRINT ,F1
70 PRINT ,P2
80 PRINT ,F2
90 PRINT ,P3
100 PRINT ,F3
110 S=P1+P2+P3
120 T=F1+F2+F3
130 R=P1*F1+P2*F2+P3*F3
140 A=S/3
150 B=T/R
160 PRINT
170 PRINT ,A,'= الوسط الحسابي غير المرجح '
180 PRINT ,B,'= الوسط الحسابي المرجح '
190 PRINT
200 PRINT
210 PRINT
220 DATA 25000,1000,23000,1400,18000,1600
230 END
240

```

المخرجات  
-----

البيانات

25000  
1000  
23000  
1400  
18000  
1600

22000 = الوسط الحسابي غير المرجح  
21500 = الوسط الحسابي المرجح

أما إذا توفرت لدينا الأوساط الحسابية لمجموعات جزئية، وأردنا الحصول على الوسط الحسابي الكلي لهذه المجموعات، أى الوسط الحسابي للمجموعة التى تضم كل هذه الأجزاء، فإنه يساوى :

$$\frac{س_1 ك_1 + س_2 ك_2 + س_3 ك_3 + \dots + س_n ك_n}{ك_1 + ك_2 + ك_3 + \dots + ك_n} = س$$

حيث ف هي عدد الأجزاء.

$$\frac{\sum_{i=1}^n س_i ك_i}{\sum_{i=1}^n ك_i} = س \quad (١٢)$$

حيث  $س$  هو الوسط الحسابي للمجموعة  $ر$ ،  $ك$  هو عدد وحدات (متغيرات) المجموعة  $ر$ .

**مثال (٤, ٦) :**

كان الوسط الحسابي لمادة الرياضيات في ثلاثة فصول هو ٨٠؛ ٨٦؛ ٧٢ فأوجد الوسط الحسابي الكلي إذا كان عدد الطلاب في الفصول الثلاثة على التوالي يساوي ٣٠ و ٣٥ و ٦٠ طالباً.

$$(١٢) \quad \frac{\sum_{K=1}^n \bar{x}_K}{\sum_{K=1}^n K} = \bar{x}$$

$$\frac{60 \times 72 + 35 \times 86 + 30 \times 80}{60 + 35 + 30} =$$

$$\frac{9730}{125} = \bar{x}$$

$$\therefore \bar{x} = 77,84 \text{ درجة}$$

أما إذا كانت هناك مجموعة من القيم المتناظرة، وكانت كل مجموعة مستقلة عن الأخرى وعدد مفرداتها مساوياً لها، فالوسط الحسابي لمجموع الظاهرتين ( $\bar{x}$ ) هو :

$$(١٣) \quad \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

كما أن الوسط الحسابي للفرق بين الظاهرتين هو :

$$(١٤) \quad \bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

حيث  $\bar{x}_1$ ،  $\bar{x}_2$  هما الوسطان الحسابيان للظاهرتين.

**٣ = الوسيط (و ٥٠٪) :**

إذا رتبنا القيم العينية ترتيباً تصاعدياً على النحو التالي :

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \text{ أو ترتيباً تنازلياً، فالإحصائية :}$$

(١)  $x_1$  تسمى بالقيمة الصغرى.



(٢) س ن تسمى بالقيمة الكبرى.

(٣) س ن - س١ تسمى المدى.

(٤) س  $\frac{(١ + ن)}{٢}$  تسمى الوسيط إذا كان عدد المتغيرات فردياً.

(٥)  $\frac{١}{٢} (س١ + س \frac{(٢ + ن)}{٢})$  تسمى الوسيط إذا كان عدد المتغيرات زوجياً.

إذاً الوسيط هو القيمة الوسطى للمقادير المرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً، كما أنه الوسط الحسابي للقيمتين الوسطيتين إذا كان عدد المتغيرات زوجياً.  
البرنامج التالي يقوم بحساب الوسيط للمفردات، والبرنامج يحتوى على فقرة لفرز القيم تنازلياً (السطر 45 إلى السطر 110).

```

10 REM برنامج لحساب الوسيط لمجموعة مفردات
20 DIM X(17)
30 READ N REM عدد القيم
40 FOR I=1 TO N
50 READ X(I)
60 NEXT I
70 REM فرز القيم تنازلياً
80 FOR I=1 TO N-1
90 FOR J=I+1 TO N
100 IF X(I)>X(J) THEN 100
110 T=X(I)
120 X(I)=X(J)
130 X(J)=T
140 NEXT J
150 NEXT I
160 PRINT "القيم:", "الترتيب:"
170 FOR I=1 TO N
180 PRINT I, X(I)
190 NEXT I
200 PRINT "الوسيط هو المتغير رقم:" P=(N+1)/2
210 DATA 17,13,25,16,36,17,18,19,16,22,19,38,41,21,36,81,17,44
220 END

```

#### المخرجات

الترتيب	القيم
1	81
2	41
3	38
4	36
5	25
6	19
7	18
8	17
9	16
10	16
11	13
12	17
13	17
14	17
15	17
16	17
17	17

الوسيط هو المتغير رقم 9 وهو الرقم 21

**مثال (٤,٧) :**

أوجد الوسيط للمتغيرات :

١٦، ٢٢، ٢١، ٢٠، ٢٣، ٢١، ١٩، ١٥، ١٣، ٢٣، ١٧، ٢٠، ٢٩، ١٨، ٢٢،  
١٦، ٢٥

**الحل :**

(١) ترتب القيم ترتيباً تصاعدياً (أو تنازلياً) لتصبح على النحو التالي :

١٣، ١٥، ١٦، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢٠، ٢١، ٢١، ٢٢، ٢٢، ٢٣، ٢٣،  
٢٥، ٢٩

(٢) بما أن عدد المفردات فردى (ن = ١٧)، لذا فترتيب الوسيط هو :

$$q = \frac{1 + 17}{2}$$

فالوسيط هو المتغير التاسع .

$$(٣) ٢٠ = ٥٠\%$$

أما البيانات المبوبة فهي مرتبة ترتيباً تصاعدياً حسب الفئات، ويجب تحديد الفئة التى  
تحتوى على الوسيط (الفئة الوسيطة) أولاً وقبل كل شىء. والفئة الوسيطة هى تلك الفئة التى  
يعلو عندها التجمع التكرارى الصاعد لنصف مجموع التكرارات (  $\frac{N}{2}$  ) لأول مرة،  
وبافتراض أن :

ح ا تعنى الحد الأدنى للفئة الوسيطة.

ط طول الفئة الوسيطة.

ك تكرار الفئة الوسيطة.

ن' التجمع التكرارى الصاعد لدى الفئة التى تسبق الفئة الوسيطة مباشرة

فإن :

$$(١٥) \quad \frac{\left( \frac{N}{2} - N' \right)}{K} + ح = ٥٠\%$$

مثال (٤, ٨) :

أوجد الوسيط للبيانات الواردة في مثال (٢) والمبينة فيما يلي :

رقم الفئة	الفئات العمرية	ك <sub>ر</sub>	التجمع التكرارى الصاعد
١	١٥,٥ - ١٢,٥	٢	٢
٢	١٨,٥ - ١٥,٥	٣	٥
٣	٢١,٥ - ١٨,٥	٤	٩
٤	٢٤,٥ - ٢١,٥	٥	١٤
٥	٢٧,٥ - ٢٤,٥	١٤	٢٨
٦	٣٠,٥ - ٢٧,٥	٢١	٤٩
٧	٣٣,٥ - ٣٠,٥	٥٩	١٠٨
٨	٣٦,٥ - ٣٣,٥	٢٤	١٣٢
٩	٣٩,٥ - ٣٦,٥	٧	١٣٩
١٠	٤٢,٥ - ٣٩,٥	٦	١٤٥
١١	٤٥,٥ - ٤٢,٥	٢	١٤٧
١٢	٤٨,٥ - ٤٥,٥	١	١٤٨
١٣	٥١,٥ - ٤٨,٥	٢	١٥٠
المجموع		١٥٠	

$$\frac{١٥٠}{٢} = \frac{ن}{٢}$$

$$٧٥ =$$

∴ الفئة الوسيطة هي الفئة السابعة = ٣٣,٥ - ٣٠,٥

وعليه تكون :

$$ح = ٣٠,٥ \quad ; \quad ن = ٤٩ \quad ; \quad ط = ٣ \quad ; \quad ك = ٩٥$$

$$\frac{ن}{٢} - \frac{ن}{٢} (ط) = \frac{٧٥}{٢} - \frac{٧٥}{٢} (٣) = ٧٥ - ١٠٥ = -٣٠$$

$$\frac{3 \times (49 - 75)}{59} + 30,5 =$$

$$31,822 = \text{و.س.} \therefore$$

البرنامج التالي يقوم بحساب الوسيط لبيانات مبوبة باستخدام طريقة التجمع التكرارى الصاعد، والتي سبق شرحها وباستخدام المعادلة :

$$R = L + \frac{(Y-O)P}{Q}$$

حيث :

R = الوسيط

L = الحد الأدنى للفئة الوسيطة

$$Y = \frac{T}{2}$$

T = مجموع التكرارات (ن)

P = B - A = طول الفئة الوسيطة

B = الحد الأعلى للفئة الوسيطة

A = الحد الأدنى للفئة الوسيطة

Q = تكرار الفئة الوسيطة

O = التجمع التكرارى الصاعد السابق للوسيطية

```

10 REM برنامج لحساب الوسيط لبيانات مجمعة
20 DIM A(13),B(13),C(13),D(13),E(13),F(13),G(13)
30 T=0
40 READ N REM عدد القيم
50 FOR I=1 TO N
60 READ A(I),B(I),F(I) REM الحد الأدنى , الحد الأعلى , التكرار
70 T=T+F(I)
72 NEXT I
73 C(1)=F(1)
75 FOR I=2 TO N
80 C(I)=C(I-1)+F(I) REM التجمع التكرارى الصاعد
90 NEXT I
110 PRINT :
120 PRINT :
130 PRINT :
140 PRINT :
145 PRINT :
150 FOR I=1 TO N
170 PRINT USING 190, C(I),F(I),B(I),A(I),I
180 NEXT I
190 :
190 :
200 PRINT :
210 PRINT :

```

```

220 PRINT TAB(33);T; TAB(60); 'المجموع'
230 PRINT
240 PRINT
250 Y=T/2
260 FOR I=1 TO N
270 IF C(I)>Y THEN 290
280 J=I
290 NEXT I
300 PRINT B(J+1);'-';A(J+1);'وهى';J+1;'الفئة الوسطية هي الفئة رقم'
310 L=A(J+1)
320 O=C(J)
330 F=B(J)-A(J)
340 Q=F(J+1)
350 R=L+((Y-O)*F)/Q
360 PRINT
370 PRINT ,R;'الوسيط'
380 PRINT
390 PRINT
400 DATA 13,12,5,15,5,2,15,5,18,5,3,18,5,21,5,4,21,5,24,5,5
410 DATA 24,5,27,5,14,27,5,30,5,21,30,5,33,5,36,5,39,5
420 DATA 36,5,39,5,7,39,5,42,5,5,42,5,45,5,2,45,5,48,5,1,48,5,51,5,2
430 END

```

المخرجات			
رقم الفئة	الفئة	التكرار	التجمع التكرارى
1	15	2	2
2	18	3	5
3	21	4	9
4	24	5	14
5	27	7	21
6	30	11	32
7	33	14	46
8	36	24	70
9	39	27	97
10	42	5	102
11	45	2	104
12	48	1	105
13	51	2	107
		150	المجموع

الفئة الوسطية هي الفئة رقم 7 وهى 30.5 - 33.5  
 الوسيط = 31.82202

#### ٤ - خصائص الوسيط واستدلالاته :

- ١ - سهل التعريف وسهل الحساب ، ذلك لأنه لا يعتمد على القيم العينية ، وإنما يستخدم الرتب لهذه القيم . وبالرغم من أن الرتب تتزايد مع القيم العينية إلا أن الوسيط هو الأفضل لتحديد المرتبة الوسطى .
- ٢ - لا يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة) ، والقيمة الشاذة هي التي تختلف اختلافاً كبيراً عن القيمة الصغرى أو الكبرى التي تليها بعد ترتيب المقادير ، أى إنها كبيرة جداً أو صغيرة

جداً، مقارنة ببقية القيم. نخذ على سبيل المثال البيانات الواردة في المثال (٦) وافرض أن القيمة الأخيرة كانت ٢٥٠ وليست ٢٥.

فالوسيط لا يزال كما هو = ٢٠

أما الوسيط الحسابى فقد أصبح

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x}{n} \\ &= \frac{565}{17} \\ \therefore \bar{x} &= 33,24 \end{aligned} \quad (2)$$

أى أن الوسيط قد أصبح أعلى من ١٦ قيمة من بين ١٧ قيمة، ذلك لأن قيمة الوسيط الحسابى تتغير إذا أضيفت أى متغيرات تختلف فى قيمها عن الوسيط الحسابى السابق للبيانات قبل الإضافة. لذلك يستخدم الوسيط لوصف الأجور فى مؤسسات معينة أو الدخل، لأن القيم المتطرفة تكون من أصل البيانات فى هذه الحالة، واستخدام الوسيط يضمن أن نصف الأفراد قد حصلوا على أجور أقل من قيمته.

٣- يمكن استخراج الوسيط فى حالة الفئات المفتوحة أو المعلومات الناقصة التى يعرف ترتيبها، ذلك لأن الوسيط لا يحتاج لمراكز الفئات ولا القيم العينية ذاتها ما دام ترتيبها معلوماً. ولعل هذه الخاصية هى أهم خصائص الوسيط التى جعلت استخداماته ضرورية فى بعض المجالات، كالأعمار التى لا يمكن تحديدها، والدخل، ودرجات الحرارة فى بعض الحالات. كذلك يستخدم الوسيط كثيراً فى المجال الصناعى، خاصة فى الفحوصات التى تحتاج لإتلاف بعض القطع، إلا أنه يفترض انتظام التوزيع داخل الفئات، بينما يفترض الوسيط الحسابى أن التوزيع داخل الفئات طبيعى.

## ٥ = المنوال (ل):

هو القيمة الأكثر تكراراً، والمنوال التقريبى للبيانات المبوبة هو مركز الفئة التى يقابلها أكبر تكرار، لذلك تسمى هذه الفئة بالفئة المنوالية. إذاً قد يكون هناك أكثر من منوال فى حالة المفردات التى تتساوى من حيث عدد التكرارات، وقد لا يوجد منوال إطلاقاً إن لم تكن هناك تكرارات.

**مثال (٤, ٩) :**

أوجد المنوال في كل من الحالات التالية :

أ- ١٤ ، ١٦ ، ١٦ ، ١٨ ، ١٩ ، ١٩ ، ١٩ ، ١٢ ، ١٠ ، ٢٤ ، ٢٦

ب- ١٤ ، ١٦ ، ١٦ ، ١٨ ، ١٨ ، ١٩ ، ١٩ ، ١٢ ، ١٠ ، ٢٤ ، ٢٦ .

ج- ١٤ ، ١٦ ، ١٨ ، ١٩ ، ١٢ ، ١٠ ، ٢٤ ، ٢٦

**الحل :**

أ / المنوال = ١٩ لأنها الأكثر تكراراً .

ب / لها ثلاثة منوال وهي ١٦ ، ١٨ ، ١٩

ج / ليس لها منوال .

أما البيانات المبوبة فقد تكون لها أيضاً أكثر من فئة منوالية ، وتعتبر طريقة بيرسون لحساب المنوال في كل حالة هي الأكثر استخداماً وتشبه إلى حد كبير طريقة استخراج الوسيط . فإذا كانت :

ف<sub>١</sub> تعنى الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والتكرار لدى الفئة التى تسبقها ، أى أن  
ف<sub>١</sub> = ك - ك' حيث ك' هي تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية .

ف<sub>٢</sub> تعنى ك - ك' حيث ك' هي تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية .

ح<sub>١</sub> تعنى الحد الأدنى للفئة المنوالية .

ط تعنى طول الفئة المنوالية . فالمعادلة هي :

$$ل = ح_١ + \left( \frac{ف_١}{ف_١ + ف_٢} \right) ط \quad (١٦)$$

**مثال (٤, ١٠) :**

أوجد المنوال للبيانات الواردة في المثال (٢) :

(أ) المنوال التقريبي هو مركز الفئة المنوالية .

الفئة المنوالية ٣٠, ٥ - ٣٣, ٥

∴ المنوال التقريبي = ٣٢

(ب) باستخدام المعادلة :

$$L = C + \left( \frac{F_1}{F_1 + F_2} \right) T$$

$$F_1 = 35 \quad ; \quad F_2 = 38 = 21 - 59 = 38$$

$$\therefore L = 3 \times \left( \frac{38}{35 + 38} \right) + 30,5 =$$

$$\therefore L = 32,062$$

فيما يلي برنامج لحساب المنوال لبيانات تكرارية وباستخدام المعادلة

$$M = L + \left( \frac{F_1}{F_1 + F_2} \right) C$$

حيث :

M = المنوال

L = الحد الأدنى للفئة المنوالية

F<sub>1</sub> = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والسابقة عليها

F<sub>2</sub> = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية واللاحقة لها

```

10 REM برنامج لحساب المنوال لبيانات مجمعة
110 DIM A(13), B(13), F(13)
120 T=0 REM مجموع التكرارات
130 READ N REM عدد القيم
140 PRINT USING 70
150 PRINT USING 80
160 : التكرار الفئـة
170 :
180 PRINT
190 FOR I=1 TO N
200 READ A(I), B(I), F(I) REM الحد الأدنى , الحد الأعلى , التكرار
210 T=T+F(I)
220 PRINT USING 130, F(I), B(I), A(I)
230 NEXT I
240 : ## ##.# - ##.#
250 PRINT
260 PRINT USING 170
270 PRINT USING 180, T
280 :
290 : ### المجموع التكرار الأعلى
300 REM لايجاد
310 H=F(1)

```





٣ - لا يتأثر بالقيم المتطرفة، ويمكن استخراجه في حالة الفئات أو المجموعات المفتوحة التي يندر أن تكون فئات منوالية. أضف إلى ذلك أنه قد يكون أفضل من الوسط الحسابي إذا كان توزيع البيانات بعيداً عن التماثل (شديد الالتواء)؛ لأن القيم الشاذة تؤثر كثيراً على الوسط الحسابي في هذه الحالة.

## ٧. العلاقة بين الوسط والوسيط والمنوال :

إذا كان التوزيع متماثلاً تماماً، كما لو كان توزيع البيانات يمثل انعكاساً من المرآة، فالمقاييس الثلاثة متساوية، وتساوى جميعها مركز الفئة المنوالية. أما إذا كان التوزيع التكراري ملتوياً التواء بسيطاً، وله فئة منوالية (قمة تكرارية) واحدة، فيكون الوسيط بين المنوال والوسط الحسابي. هذا ولقد أثبت بيرسون العلاقة التقريبية التالية بتكرار التجارب على توزيعات ليست شديدة الالتواء. والعلاقة هي :

$$\frac{(\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال})}{3} = \text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط}$$

أى أن :

$$\text{س} - \text{ل} = 3 (\text{س} - \text{و}, \text{و} \cdot 100\%) \quad (17)$$

### مثال (١١، ٤)

أوجد المنوال باستخدام الوسط الحسابي والوسيط للبيانات الواردة في المثال (٢)، وقارن ذلك بالمنوال المستخرج في المثال (٩).

$$\begin{aligned} \text{س} - \text{ل} &= 3 (\text{س} - \text{و}, \text{و} \cdot 100\%) \\ \therefore \text{س} - \text{ل} &= 3 (\text{س} - \text{و}, \text{و} \cdot 100\%) \\ \text{ل} &= 31, 48 - 31, 48 \\ \text{ل} &= 32, 06 \end{aligned} \quad (17)$$

وبما أن هذه القيمة تختلف عن تلك التي استخرجت في المثال (٩)، والتي كانت تساوى ٣٢, ٠٦٢ فهذا يعنى أن الالتواء ليس بسيطاً جداً. وتجدد الإشارة هنا إلى أن الوسط الحسابي يكون أصغر المقاييس الثلاثة، إذا كان الالتواء سالباً، وأكبرها إذا كان موجباً، بينما يقع الوسيط بين الوسط الحسابي والمنوال.

## ٨ = الوسط الهندسي (هـ) :

هو الجذر النوني لحاصل ضرب ن قيمة عينية. أى أن الوسط الهندسي (هـ) للمتغيرات  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  هو :

$$(١٨) \quad \sqrt[n]{s_1 \times s_2 \times s_3 \times \dots \times s_n} = \text{هـ}$$

وهذا يعنى أن :

$$(١٩) \quad \text{لو هـ} = \frac{\text{لوس } ١ + \text{لوس } ٢ + \text{لوس } ٣ + \dots + \text{لوس } ن}{ن}$$

$$(٢٠) \quad \text{لو هـ} = \frac{\sum_{r=1}^n \text{لوس } ر}{ن}$$

إذاً فلوغاريتم الوسط الهندسي للقيم هو الوسط الحسابى للوغاريتمات تلك القيم.

## مثال (٤, ١٢) :

أوجد الوسط الهندسي للقيم :

١٦ ، ٢٢ ، ٢١ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢١ ، ١٩ ، ١٥ ، ١٣ ، ٢٣ ، ١٧ ، ٢٠ ، ٢٩ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ١٦

$$\text{لو هـ} = \frac{\text{لو } ١٦ + \text{لو } ٢٢ + \text{لو } ٢١ + \dots + \text{لو } ٢٥}{١٧}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{١,٣٩٨ + \dots + ١,٣٢٢ + ١,٣٤٢ + ١,٢٠٤١٢}{١٧}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{٢١,٩٧٧٨٨٧}{١٧}$$

$$\text{لو هـ} = ١,٢٩٢٨١٦٨$$

$$\therefore \text{هـ} = ١٩,٦٢٥$$

البرنامج أدناه يقوم بحساب الوسط الهندسي لمفردات، باستخدام المعادلة :

$$G = \sqrt[N]{T}$$

حيث :

G = الوسط الهندسي

N = عدد المتغيرات

T =  $T_1 \times T_2 \times T_3 \times \dots \times T_N$

```

10 REM برنامج لحساب الوسط الهندسي لمجموعة مفردات
20 T=1
25 PRINT 'البيانات'
27 PRINT '-----'
30 READ N, REM عدد الارقام
40 FOR I=1 TO N
50 READ X
60 PRINT X
70 T=T*X
80 NEXT I
90 G=T**(1/N)
100 PRINT
110 PRINT
120 PRINT 'G, '= الوسط الهندسي '
130 PRINT
140 PRINT
150 DATA 17,16,22,21,20,23,21,19,15,13,23,17,20,29,18,22,16,25
160 END

```

المخرجات

-----

البيانات

16  
23  
21  
20  
23  
21  
19  
15  
13  
23  
17  
20  
29  
18  
22  
16  
25

الوسط الهندسي = 19.62531

أما في حالة التوزيعات التكرارية حيث  $n$  تعني مركز الفئة  $r$  التي يساوي تكرارها  $K_r$ .

وبما أن  $\sum K_r = n$  فالوسط الهندسي (هـ) هو :

$$(21) \quad H = \sqrt[n]{K_1 \times K_2 \times K_3 \times \dots \times K_r \times \dots \times K_n}$$

حيث  $n$  تعني عدد المجموعات.

$$(22) \quad \therefore \text{لوه} = \frac{K_1 \text{ لوس} + K_2 \text{ لوس} + K_3 \text{ لوس} + \dots + K_r \text{ لوس} + \dots + K_n \text{ لوس}}{n}$$

$$(23) \quad \text{لوه} = \frac{\sum_{r=1}^n K_r \text{ لوس}}{n}$$

**مثال (١٣، ٤) :**

أوجد الوسط الهندسي للبيانات الواردة في المثال (٢) والمبينة أدناه :

رقم الفئة	الفئة	$K_r$	$n$	لوس $n$	$K_r$ لوس
١	١٢,٥ - ١٥,٥	٢	١٤	١,١٤٦	٢,٢٩٢
٢	١٥,٥ - ١٨,٥	٣	١٧	١,٢٣٠	٣,٦٩٠
٣	١٨,٥ - ٢١,٥	٤	٢٠	١,٣٠١	٥,٢٠٤
٤	٢١,٥ - ٢٤,٥	٥	٢٣	١,٣٦٢	٦,٨١٠
٥	٢٤,٥ - ٢٧,٥	١٤	٢٦	١,٤١٥	١٩,٨١٠
٦	٢٧,٥ - ٣٠,٥	٢١	٢٩	١,٤٦٢	٣٠,٧٠٢
٧	٣٠,٥ - ٣٣,٥	٥٩	٣٢	١,٥٠٥	٨٨,٧٩٥
٨	٣٣,٥ - ٣٦,٥	٢٤	٣٥	١,٥٤٤	٣٧,٠٥٦
٩	٣٦,٥ - ٣٩,٥	٧	٣٨	١,٥٨٠	١١,٠٦٠
١٠	٣٩,٥ - ٤٢,٥	٦	٤١	١,٦١٣	٩,٦٧٨
١١	٤٢,٥ - ٤٥,٥	٢	٤٤	١,٦٤٣	٣,٢٨٦
١٢	٤٥,٥ - ٤٨,٥	١	٤٧	١,٦٧٢	١,٦٧٢
١٣	٤٨,٥ - ٥١,٥	٢	٥٠	١,٦٩٩	٣,٣٩٨
	المجموع	١٥٠			٢٢٣,٤٥٣

$$(٢٣) \quad \frac{\sum_{i=1}^{13} \text{ك, لوسر}}{ن} = \text{لوه}$$

$$\frac{٢٢٣,٤٥٣}{١٥٠} = \text{لوه}$$

$$١,٤٨٩٦٨٦٦ = \text{لوه}$$

$$٣٠,٨٨١ = \text{ه.}$$

البرنامج التالي يقوم بحساب الوسط الهندسي لبيانات تكرارية:

```

10 REM برنامج لحساب الوسط الهندسي لبيانات مجمعة
20 DIM A(13),B(13),C(13),D(13),E(13),F(13),G(13)
30 F1=0 REM مجموع التكرارات
35 D1=0 REM مجموع المجموعات
40 READ N REM عدد المجموعات
50 FOR I=1 TO N
60 READ A(I),B(I),F(I) REM الحد الأدنى, الحد الأعلى, التكرار
70 F1=F1+F(I)
80 C(I)=(A(I)+B(I))/2
90 O(I)=LOG(C(I))
100 D1=D1+D(I)*F(I)
110 D1=D1+D(I)
120 NEXT I
125 PRINT
130 PRINT : "الحد الأدنى" "الحد الأعلى" "التكرار" "الحد الأوسط" "الحد الأدنى" "الحد الأعلى" "التكرار" "الحد الأوسط"
140 PRINT : "-----"
150 PRINT : "الحد الأدنى" "الحد الأعلى" "التكرار" "الحد الأوسط" "الحد الأدنى" "الحد الأعلى" "التكرار" "الحد الأوسط"
155 PRINT : "-----"
160 FOR I=1 TO N
170 PRINT USING 190, D(I),G(I),C(I),F(I),B(I),A(I),I
180 , ##.### ##.### ##.### ##.### ##.### ##.### ##.### ##.###
200 NEXT I
210 PRINT : "-----"
220 PRINT : "الحد الأدنى" "الحد الأعلى" "التكرار" "الحد الأوسط" "الحد الأدنى" "الحد الأعلى" "التكرار" "الحد الأوسط"
230 PRINT D1; TAB(33);F1; TAB(50); 'المجموع'
240 PRINT
250 PRINT
260 H=D1/F1
270 M=10**H
310 PRINT ,M; 'الوسط الهندسي'
320 PRINT
330 PRINT
340 DATA 13,12,5,15,5,2,15,5,18,5,3,18,5,21,5,4,21,5,24,5,5
350 DATA 24,5,27,5,14,27,5,30,5,21,30,5,33,5,33,5,36,5,40,5
360 DATA 36,5,39,5,7,39,5,42,5,6,42,5,45,5,2,45,5,48,5,1,48,5,51,5,2
370 END

```

المخرجات					
رقم الفرقة	الفئة	لر	سر	لوسر	لرلوسر
1	12.5	15.5	2	1.146	2.292
2	15.5	18.5	3	1.230	3.691
3	18.5	21.5	4	1.301	5.204
4	21.5	24.5	5	1.362	6.809
5	24.5	27.5	6	1.415	19.810
6	27.5	30.5	7	1.462	30.710
7	30.5	33.5	8	1.505	88.804
8	33.5	36.5	9	1.544	337.058
9	36.5	39.5	10	1.580	11.058
10	39.5	42.5	11	1.613	39.677
11	42.5	45.5	12	1.643	33.287
12	45.5	48.5	13	1.672	1.672
13	48.5	51.5	14	1.699	3.398
المجموع		150			223.4698
		الوسط الهندسي =	30.88858		

#### ٩ - خصائص الوسط الهندسي واستخداماته :

الخاصية الأساسية للوسط الهندسي هي أنه عبارة عن قيمة تحويلية (Transformed) للوسط الحسابي. هذا ولقد تم اشتقاقه ليتم تطبيقه في حالة معينة بدلاً من الوسط الحسابي، وتلك الحالة هي التي تتبع فيها البيانات نمط المتوالية الهندسية التزايدية أو التناقصية. والمتوالية الهندسية هي مجموعة من القيم المرتبة بحيث تكون النسبة بين كل قيمتين متتاليتين كمية ثابتة، وبالتالي يمكن الانتقال فيها من أى قيمة س إلى القيمة التالية س + ١ بالضرب في الكمية الثابتة. فمثلاً القيم التالية عبارة عن متوالية هندسية كميتها الثابتة تساوى ٣.

$$١٦٢،٥٤، ١٨، ٦، ٢$$

فالوسط الحسابي لهذه المتوالية = ٤٨،٤

وهو يبدو وكأن ١٦٢ قيمة شاذة مع أنها جزء من المتوالية، أما الوسط الهندسي لنفس البيانات أعلاه فهو يساوى ١٨، وهى فعلاً القيمة التى تتوسط هذه القيم.

بذلك يصبح الوسط الهندسي هو المقياس الأفضل للنزعة المركزية في حالات الزيادة أو النقصان بنسب ثابتة، كما هو الحال في تقديرات التعداد السكاني والأسعار.

وباختصار :

الوسط الهندسى هو الأفضل فى جميع الحالات التى يمكن أن تستخدم فيها قاعدة الفائدة المركبة ؛ لإيجاد الجملة (جـ) التى يؤول إليها مبلغ من المال (أ) بعد (ن) فترة زمنية بمعدل فائدة ع.٪ عن كل فترة على النحو التالى :

$$ج = أ (١ + ع)^ن \quad (٢٤)$$

أضف إلى ذلك أن الوسط الهندسى هو الأفضل ، لإيجاد متوسط التغير النسبى عند استخدام الأرقام القياسية .

#### ١٠ - الوسط التوافقى (ق) :

إذا كانت س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub> ، . . . . ، س<sub>ن</sub> هى قيم عينية ، فالوسط التوافقى هو :

$$ق = \frac{ن}{\frac{١}{س_١} + \frac{١}{س_٢} + \frac{١}{س_٣} + \dots + \frac{١}{س_ن}} \quad (٢٥)$$

$$ق = \frac{ن}{\sum \left( \frac{١}{س_r} \right)} \quad (٢٦)$$

فهو إذاً عدد المتغيرات مقسوماً على مجموع مقلوبات المتغيرات .

**مثال (١٤ ، ٤) :**

أوجد الوسط التوافقى للمتغيرات :

١٦ ، ٢٢ ، ٢١ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢١ ، ١٩ ، ١٥ ، ١٣ ، ٢٣ ، ١٧ ، ٢٠ ، ٢٩ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ١٦

**الحل :**

$$ق = \frac{١٧}{\frac{١}{٢٥} + \dots + \frac{١}{٢١} + \frac{١}{٢٢} + \frac{١}{١٦}}$$



$$\frac{17}{0,04 + \dots + 0,0476 + 0,0455 + 0,0625} = \text{ق}$$

$$\frac{17}{0,8831862} = \text{ق}$$

$$19,248 = \text{ق}$$

فيما يلي برنامج لحساب الوسط التوافقي لقيم عينية باستخدام المعادلة :

$$M = \frac{N}{T}$$

حيث :

M = الوسط التوافقي

N = عدد المتغيرات

T = مجموع مقلوبات المتغيرات

```

10 REM برنامج لحساب الوسط التوافقي لمجموعة مفردات
20 T=0 REM مجموع مقلوبات البيانات
30 PRINT 'البيانات'
40 PRINT '-----'
50 READ N, REM عدد الارقام
60 FOR I=1 TO N
70 READ X
80 PRINT X
90 T=T+1/X
100 NEXT I
110 PRINT
120 PRINT
130 M=N/T
140 PRINT 'الوسط التوافقي', M
150 PRINT
160 PRINT
170 DATA 17,16,22,21,20,23,21,19,15,13,23,17,20,29,18,22,16,25
180 END
    
```

المخرجات
البيانات
16
22
21
20
23
21
19
15
13
23
17
20
29
18
22
16
25
الوسط التوافقي = 19.24847

أما في حالة البيانات المبوية في جدول تكرارى مكون من (ف) فئة فالوسط التوافقي هو :

$$(٢٧) \quad \frac{ك_1 + ك_2 + ك_3 + \dots + ك_f}{\frac{ك_1}{س_1} + \frac{ك_2}{س_2} + \frac{ك_3}{س_3} + \dots + \frac{ك_f}{س_f}} = ق$$

$$(٢٨) \quad \frac{\sum_{r=1}^f ك_r}{\left( \frac{ك_r}{س_r} \right) \sum} = ق$$

$$(٢٩) \quad \frac{ن}{\left( \frac{ك_r}{س_r} \right) \sum} = ق \therefore$$

مثال (٤, ١٥) :

أوجد الوسط التوافقي للبيانات الواردة في المثال (٢) والمبينة أدناه :

رقم الفئة	الفئة	ك <sub>r</sub>	س <sub>r</sub>	ك <sub>r</sub> س <sub>r</sub>
١	١٢,٥ - ١٥,٥	٢	١٤	٠,١٤٣
٢	١٥,٥ - ١٨,٥	٣	١٧	٠,١٧٦
٣	١٨,٥ - ٢١,٥	٤	٢٠	٠,٢٠٠
٤	٢١,٥ - ٢٤,٥	٥	٢٣	٠,٢١٧
٥	٢٤,٥ - ٢٧,٥	١٤	٢٦	٠,٥٣٨
٦	٢٧,٥ - ٣٠,٥	٢١	٢٩	٠,٧٢٤
٧	٣٠,٥ - ٣٣,٥	٥٩	٣٢	١,٨٤٤
٨	٣٣,٥ - ٣٦,٥	٢٤	٣٥	٠,٦٨٦
٩	٣٦,٥ - ٣٩,٥	٧	٣٨	٠,١٨٤
١٠	٣٩,٥ - ٤٢,٥	٦	٤١	٠,١٤٦
١١	٤٢,٥ - ٤٥,٥	٢	٤٤	٠,٠٤٥
١٢	٤٥,٥ - ٤٨,٥	١	٤٧	٠,٠٢١
١٣	٤٨,٥ - ٥١,٥	٢	٥٠	٠,٠٤٠
المجموع		١٥٠		٤,٩٦٦

$$\frac{١٥٠}{٤,٩٦٦} = ق$$

$$٣٠,٢٠٥ = ق .\therefore$$

أما في حالة التوزيعات التكرارية فالبرنامج التالى يقوم بحساب الوسط التوافقي، وتستخدم كمثال البيانات الواردة في المثال السابق وباستخدام المعادلة :

$$M = \frac{FI}{DI}$$

حيث :

M = الوسط التوافقي

FI = مجموع التكرارات (ن)

DI = مجموع مناسيب التكرارات لمراكز الفئات

```

10 REM برنامج لحساب الوسط النوافقي لبيانات مجمعة
20 DIM A(13), B(13), C(13), D(13), F(13)
30 F1=0 REM مجموع التكرارات
40 D1=0 REM مجموع D
50 READ N REM عدد الملاحظات
60 FOR I=1 TO N
70 READ A(I), B(I), F(I) REM الحد الأدنى, الحد الأعلى, التكرار
80 F1=F1+F(I)
90 C(I)=(A(I)+B(I))/2
100 D(I)=F(I)/C(I)
110 D1=D1+D(I)
120 NEXT I
125 PRINT
130 PRINT
140 PRINT
150 PRINT
155 PRINT
160 FOR I=1 TO N
170 PRINT USING 180, D(I), C(I), F(I), B(I), A(I), I
180 , ##.### ##.## ##.## - ##.## ##
190 NEXT I
200 PRINT
210 PRINT
220 PRINT USING 230, D1, F1
230 , ##.### ##### المجموع
240 PRINT
250 M=F1/D1
300 M=F1/D1
310 PRINT ,M,'=الوسط النوافقي'
320 PRINT
330 PRINT
340 DATA 13, 12.5, 15.5, 27.5, 15.5, 18.5, 3, 18.5, 13.5, 5, 4, 21.5, 5, 5, 5
350 DATA 24.5, 27.5, 7, 39.5, 42.5, 6, 42.5, 45.5, 12.5, 25, 45, 48, 48, 5, 1, 48.5, 51.5, 2
360 DATA 36.5, 39.5, 7, 39.5, 42.5, 6, 42.5, 45.5, 12.5, 25, 45, 48, 48, 5, 1, 48.5, 51.5, 2
370 END

```

#### المخرجات

الترتيب	الحد الأدنى	الحد الأعلى	الوسط	التر/س
1	13	12.5	15.5	0.143
2	15.5	27.5	15.5	0.176
3	18.5	3	18.5	0.000
4	21.5	5	4	0.000
5	24.5	27.5	7	0.000
6	27.5	39.5	42.5	0.000
7	39.5	42.5	6	0.000
8	42.5	45.5	12.5	0.000
9	45.5	25	45	0.000
10	48	48	5	0.000
11	48	5	1	0.000
12	48.5	51.5	2	0.000
13	51.5	2		0.000
المجموع			150	4.966

الوسط النوافقي = 30.205

## ١١ - خصائص الوسط التوافقي واستخداماته :

إذا كانت  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  هي قيم عينية فمقلوبات هذه القيم هي :

$$\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \frac{1}{s_3}, \dots, \frac{1}{s_n}$$

أما مجموع هذه المقلوبات فهو :

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \dots + \frac{1}{s_n}$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{1}{s_r}$$

وأما الوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم ، فهو مجموعها مقسوماً على عددها (ن) . إذاً هو :

$$\bar{s} = \frac{\left( \sum_{r=1}^n \frac{1}{s_r} \right)}{n} \quad (30)$$

ومقلوب الوسط الحسابي  $\left( \frac{1}{\bar{s}} \right)$  لمقلوبات هذه القيم هو :

$$\frac{n}{\left( \sum_{r=1}^n \frac{1}{s_r} \right)} = \frac{1}{\bar{s}} \quad (31)$$

$$\therefore \frac{1}{\bar{s}} = \bar{q} \quad (32)$$

إذاً فالوسط التوافقي هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات القيم. وعليه ، فالوسط التوافقي هو قيمة تحويلية للوسط الحسابي يستخدم بدلاً منه في حالات خاصة جداً ، شأنه في ذلك شأن الوسط الهندسي .

هناك بعض الحالات التى تكون فيها القيم عبارة عن ناتج قسمة متغير على متغير آخر ليس من نفس وحدة القياس . فالسرعة هى ناتج قسمة المسافة على الزمن (كم / الساعة) ، والسعر هو ناتج قسمة المبلغ على عدد القطع مثلاً (ريال / قطعة) ، والإنتاجية هى ناتج قسمة الإنتاج على المساحة (طن / هكتار) .

فالزمن المتوسط لقطع مسافة كيلو متر واحد ، أو متوسط عدد القطع التى يمكن شراؤها بريال واحد ، أو متوسط المساحة التى يجب زراعتها لإنتاج طن واحد ، يعنى تحويل البسط إلى وحدة واحدة . فتكون وحدات القياس السالفة الذكر على النحو التالى :

$$\frac{1}{\text{ساعة}} , \frac{1}{\text{قطعة}} , \frac{1}{\text{هكتار}}$$

وكل واحدة منها تمثل مقلوباً لقيمة معينة . ففى مثل هذه الحالات وما شابهها يكون الوسط التوافقى هو المقياس الأفضل بدلاً من الوسط الحسابى .

## ١٢ = الربيعات والمثيرات والمئينيات :

(Quartiles, Deciles and percentiles)

الربيعات هى التى تقسم القيم إلى أربعة أقسام يساوى كل منها الربع (٢٥٪) ، لذلك فهى ثلاثة :

### أ = الربع الأعلى (٧٥٪) :

وهو الذى يقسم القيم إلى جزأين بحيث يكون عدد القيم التى أقل منه يساوى  $\frac{3}{4}$  والربع الباقى أكثر منه . ويمكن استخراجه من البيانات المبوبة حسب القاعدة :

$$(٧٥\%) = ح + \frac{(ن - \frac{3}{4}ن - ط)}{ك} \quad (٣٣)$$

حيث :

ح = فئة الربع الأعلى التى يعلو عندها التجمع التكرارى الصاعد لقيمة  $\frac{3}{4}$  ن لأول مرة .

نَ هي التجمع التكرارى الصاعد لدى الفئة التى تسبق فئة الربيع الأعلى .

ط هي طول فئة الربيع الأعلى .

ك هي تكرار فئة الربيع الأعلى .

ويلاحظ أن القاعدة نفسها هي قاعدة الوسيط مع اختلاف تفسير الرموز .

**ب - الربيع الأوسط ( ٥٠ ٪ ) :**

وهو الوسيط .

**ج - الربيع الأدنى ( ٢٥ ٪ ) :**

وهو القيمة التى تعلو  $\frac{1}{4}$  القيم بينما تعلو عليها  $\frac{3}{4}$  تلك القيم ، وبذلك تكون قاعدة الربيع الأدنى هي :

$$(٣٤) \quad \frac{\left( \frac{N}{4} - N' \right) \text{ ط}}{ك} + ح = ٢٥\%$$

حيث

ح هي الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى التى تعلو عندها التجمع التكرارى الصاعد لقيمة  $\frac{N}{4}$  لأول مرة .

نَ هي التجمع التكرارى الصاعد لدى الفئة التى تسبق فئة الربيع الأدنى .

ط هي طول فئة الربيع الأدنى .

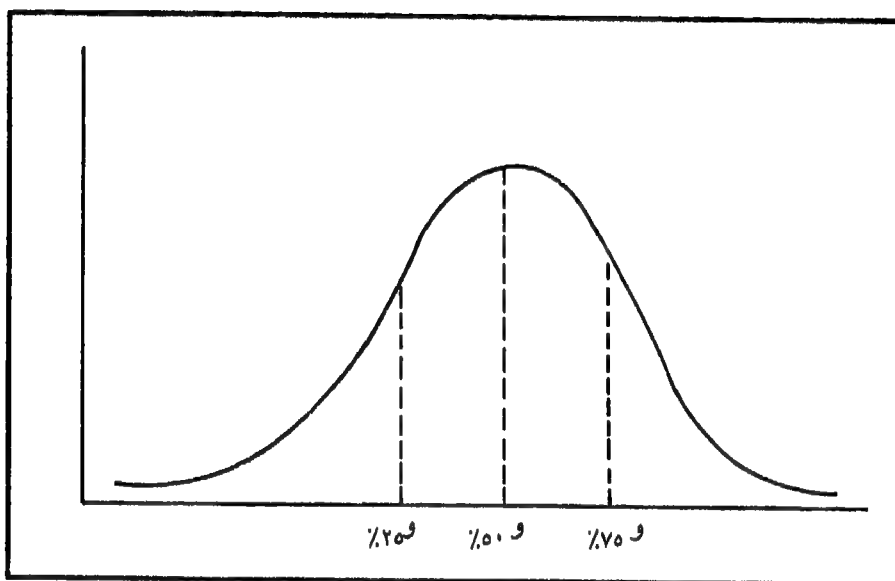
ك تكرار فئة الربيع الأدنى .

وهذا يعنى أن :

$$(٣٥) \quad ٧٥\% < ٥٠\% < ٢٥\%$$

أما ٧٥٪ - و ٥٠٪ فهى لاتساوى ٥٠٪ - ٢٥٪ إلا إذا كان التوزيع الخاص بالبيانات متناثلاً تماماً .

إذا كانت الربيعات هي التي تقسم المساحة التي تقع تحت المضلع التكرارى إلى أربعة أقسام متساوية.



فإن العشرية هي التي تقسم تلك المساحة إلى عشرة أقسام متساوية، والمئينية هي التي تقسمها إلى مائة قسم متساوي. فالمئينى الأول هو 1% والعشير الأول هو 10%. ويكون المئينى الخمسون هو العشير الخامس، وهو الربع الثانى، وهو الوسيط، لأنها جميعاً تساوى 50%. ولاستخراج الجزئى الرائى تستخدم المعادلة :

$$\text{و\%} = 1 + \frac{\left( \frac{R_n}{100} - N' \right) \cdot \text{ط}}{K} \quad (36)$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أن هذه المقاييس - باستثناء الوسيط - ليست من مقاييس النزعة المركزية، ولكنها تستخدم لوصف التوزيع التكرارى للبيانات، وتحديد المواقع النسبية للمفردات مقارنة ببقية عناصر المجموعة. لذلك تستخدم كثيراً لتحديد التقديرات الخاصة بالطلاب.



مثال (٤, ١٦) :

استخدم البيانات الواردة في مثال (٧) والمبينة بعد لاستخراج الربيع الأعلى والربيع الأدنى .

رقم الفئة	الفئات العمرية	كـ	التجمع الصاعد
١	١٥,٥ - ١٢,٥	٢	٢
٢	١٨,٥ - ١٥,٥	٣	٥
٣	٢١,٥ - ١٨,٥	٤	٩
٤	٢٤,٥ - ٢١,٥	٥	١٤
٥	٢٧,٥ - ٢٤,٥	١٤	٢٨
٦	٣٠,٥ - ٢٧,٥	٢١	٤٩ ← فئة الأدنى
٧	٣٣,٥ - ٣٠,٥	٥٩	١٠٨ ← فئة الوسيط
٨	٣٦,٥ - ٣٣,٥	٢٤	١٣٢ ← فئة الأعلى
٩	٣٩,٥ - ٣٦,٥	٧	١٣٩
١٠	٤٢,٥ - ٣٩,٥	٦	١٤٥
١١	٤٥,٥ - ٤٢,٥	٢	١٤٧
١٢	٤٨,٥ - ٤٥,٥	١	١٤٨
١٣	٥١,٥ - ٤٨,٥	٢	١٥٠
المجموع		١٥٠	

$$١١٢,٥ = \frac{١٥٠ \times ٣}{٤} = \frac{٣}{٤} \text{ ن } ٧٥\%$$

$$\frac{٣ \times (١٠٨ - ١١٢,٥)}{٢٤} + ٣٣,٥ = ٧٥\% \text{ ن.}$$

$$٣٤,٠٦٣ = ٧٥\% \text{ ن.}$$

٢٥% :

$$٣٧,٥ = \frac{٣}{٤} \text{ ن }$$

$$\frac{٣ \times (٢٨ - ٣٧,٥)}{٢١} + ٢٧,٥ = ٢٥\% \text{ ن.}$$

$$٢٨,٨٥٧ = ٢٥\% \text{ ن.}$$

البرنامج التالى يقوم باستخراج الآتى مستخدماً البيانات بالمثال السابق :

- فئة الربيع الأعلى .
- الفئة الوسيطة .
- فئة الربيع الأدنى .
- الربيع الأعلى .
- الوسيط .
- الربيع الأدنى .

باستخدام المعادلة العامة :

$$Q(l) = L(l) + \frac{(S(l) - O(l)) P(l)}{W(l)}$$

وتكون القيمة هى الربيع الأعلى أو الوسيط أو الربيع الأدنى ، عندما تكون اتساوى ١ أو ٢ أو ٣ على التوالى .

حيث :

- Q = الربيع
- L = الحد الأدنى للفئة
- S = النسبة من عدد المتغيرات
- D = المتجمع التكرارى للفئة السابقة
- P = طول الفئة
- W = تكرار الفئة

```

10 REM برنامج لحساب الربيعات لبيانات مجمعه
20 DIM A(13),B(13),C(13),D(13),E(13),F(13),G(13)
30 T=0
40 READ N
50 FOR I=1 TO N
60 READ A(I),B(I),F(I)
70 T=T+F(I)
80 NEXT I
90 C(1)=F(1)
100 FOR I=2 TO N
110 C(I)=C(I-1)+F(I)
120 PRINT I
125 PRINT '
130 PRINT '
140 PRINT '
150 PRINT '
160 PRINT '
170 FOR I=1 TO N
180 PRINT USING 190, C(I),F(I),B(I),A(I),I
190 , ### - ###.## ##
200 NEXT I
210 PRINT '
220 PRINT '
230 PRINT TAB(33);T; TAB(50); 'المجموع'
240 PRINT '
250 PRINT '
260 S1=T*3/4
270 S2=T/2
280 S3=T/4
290 FOR I=1 TO N
300 IF C(I)>S1 THEN 320
310 J=I
320 NEXT I
330 FOR I=1 TO N
340 IF C(I)>S2 THEN 360
350 K=I
360 NEXT I
370 FOR I=1 TO N
380 IF C(I)>S3 THEN 400
390 V=I
400 NEXT I
410 PRINT USING 470, B(J+1),A(J+1),J+1
420 PRINT '
430 PRINT USING 480, B(K+1),A(K+1),K+1
440 PRINT '
450 PRINT USING 490, B(V+1),A(V+1),V+1
460 PRINT '
470 , ###.## - ###.## وفي ## رقم الفئة الاعلى هي
480 , ###.## - ###.## وفي ## رقم الفئة الوسطية هي
490 , ###.## - ###.## وفي ## رقم الفئة الادنى هي
500 GOSUB 630
510 Q1=FNA(L1,S1,O1,P1,W1)
520 PRINT ,Q1; 'الربيع الاعلى'
525 PRINT '
530 GOSUB 680
540 Q2=FNA(L2,S2,O2,P2,W2)
550 PRINT ,Q2; 'الربيع الوسيط'
560 PRINT '
570 GOSUB 730
580 Q3=FNA(L3,S3,O3,P3,W3)
590 PRINT ,Q3; 'الربيع الادنى'
600 PRINT '
610 PRINT '
620 STOP
630 L1=A(J+1)
640 O1=C(J)
650 P1=B(J)-A(J)
660 W1=F(J+1)
670 RETURN
680 L2=A(K+1)
690 O2=C(K)
700 P2=B(K)-A(K)
710 W2=F(K+1)
720 RETURN
730 L3=A(V+1)
740 O3=C(V)
750 P3=B(V)-A(V)
760 W3=F(V+1)
770 RETURN
780 DEF FNA(L,X,O,P,W)=L+((X-O)*P)/W
810 DATA 13,12.5,15.5,2,15.5,18.5,3,18.5,21.5,4,21.5,24.5,5
820 DATA 24.5,27.5,14,27.5,30.5,21,30.5,33.5,59,33.5,36.5,24
830 DATA 36.5,39.5,7,39.5,42.5,6,42.5,45.5,2,45.5,48.5,1,48.5,51.5,2
840 END

```

# المخرجات

رقم الفئة	الفئة	التكرار	النجم التكراري المعاد
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
11	11	11	11
12	12	12	12
13	13	13	13
14	14	14	14
15	15	15	15
16	16	16	16
17	17	17	17
18	18	18	18
19	19	19	19
20	20	20	20
21	21	21	21
22	22	22	22
23	23	23	23
24	24	24	24
25	25	25	25
26	26	26	26
27	27	27	27
28	28	28	28
29	29	29	29
30	30	30	30
31	31	31	31
32	32	32	32
33	33	33	33
34	34	34	34
35	35	35	35
36	36	36	36
37	37	37	37
38	38	38	38
39	39	39	39
40	40	40	40
41	41	41	41
42	42	42	42
43	43	43	43
44	44	44	44
45	45	45	45
46	46	46	46
47	47	47	47
48	48	48	48
49	49	49	49
50	50	50	50

150

المجموع

فئة الرشح الاعلى هي الفئة رقم 8 وهي 33.5 - 36.5  
 الفئة الوسطية هي الفئة رقم 7 وهي 30.5 - 33.5  
 فئة الرشح الادنى هي الفئة رقم 6 وهي 27.5 - 30.5  
 الربيع الاعلى = 34.0625  
 الوسيط = 31.82202  
 الرشح الادنى = 28.85713

## تمارين

١ - البيانات التالية تمثل عينات لرواتب عدد من العاملين في أربع إدارات مختلفة بإحدى المؤسسات (بالريال) :

الرقم	الإدارة (أ)	الإدارة (ب)	الإدارة (ج)	الإدارة (د)
١	٣٠٠٠	٦٣١٤	٤٩٥٠	٨٤٠٠
٢	٧٠٠٠	٨٤٠٧	١٢٣٦٠	١١٩٠٠
٣	٥١٠٠	٧١١٩	٩٠٩٠	٦٣٠٠
٤	٩٤٥٠	٦٤٣٣	١٠٧١٠	٤٩٠٠
٥	٨٧٦٥	١٠٥٢٨	٢٣٤٠	٣٥٠٠
٦	٦٤٠٠	٩٣١٧	٩٤٥٠	٧٠٠٠
٧	١٢٠٠٠	٧٧١٤	٦٣٩٠	٤٢٠٠
٨	٤٦٥٠		٦١٢٠	
٩	٦٦٣٥		٨١٩٠	
١٠	٨٣٠٠			

فأوجد الوسط الحسابي لكل إدارة.

- ٢ - استخدم بيانات السؤال الأول لإيجاد الوسط الحسابي لجميع أفراد العينات البالغ عددهم ٣٣ شخصاً.
- ٣ - أوجد وسط الأوساط الأربعة لبيانات السؤال الأول، وبين مدى اختلافه عن الوسط الخاص بالسؤال الثاني، ووضح سبب الفرق بين الوسطين.
- ٤ - أوجد الوسط الحسابي الخاص بالإدارتين (ب) و (د) معاً، مستخدماً بيانات السؤال الأول.
- ٥ - أوجد الوسط الحسابي للإدارتين (أ) و (ج) معاً، مستخدماً بيانات السؤال الأول.
- ٦ - أوجد حجم عينة من الأعمار مجموع متغيراتها ١٦١ عاماً ووسطها الحسابي ٢٣ سنة.
- ٧ - الوسط الحسابي لعدد أيام انشغال السرير في أحد الأجنحة ٩ أيام ؛ بينما كان الوسط الحسابي لعدد أيام انشغال السرير في جناح آخر ١٤ يوماً. أوجد الوسط الحسابي للجناحين معاً، إذا علمت أن العينة التي سحبت من الجناح الأول ٢٥ مريضاً، بينما كان قوام حجم العينة في الجناح الآخر ٢١ مريضاً.

٨ - أوجد الوسط الحسابى للبيانات التالية الخاصة بتوزيع بعض المصابين فى حوادث المرور حسب الأعمار، والبيانات هى :

عدد المصابين	العمر بالسنوات
١	٦ - ١
٧	١٢ - ٧
١٥	١٨ - ١٣
٢٧	٢١ - ١٩
٢١	٢٥ - ٢١
٩	٣٠ - ٢٥
٥	٣٨ - ٣١
٢	٤٨ - ٣٩
١	٥٨ - ٤٩

- ٩ - أوجد الوسيط لكل مجموعة من المجموعات الواردة فى السؤال الأول .
- ١٠ - أوجد الوسيط للإدارات الأربع الواردة فى السؤال الأول، ووضح سبب اختلافه عن الوسيط للأربعة وسيطات .
- ١١ - أوجد الوسيط للإدارتين (ب) و (د) معاً مستخدماً بيانات السؤال الأول .
- ١٢ - أوجد الوسيط للإدارتين (أ) و (ج) معاً مستخدماً بيانات السؤال الأول .
- ١٣ - قارن قيمة الوسيط فى كل من الأسئلة ٩ - ١٢ بنظيرتها الخاصة بالوسط الحسابى .
- ١٤ - أوجد الوسيط للبيانات الواردة فى السؤال الثامن . هل تختلف قيمة الوسيط عن الوسط الحسابى لتلك البيانات؟ ولماذا؟
- ١٥ - ماهى مزايا الوسيط على الوسط الحسابى؟
- ١٦ - أوجد المنوال لكل مجموعة من المجموعات الأربع الواردة فى السؤال الأول (إن وجد) .
- ١٧ - أوجد المنوال للمجموعات الأربع الواردة فى السؤال الأول .
- ١٨ - أوجد المنوال للبيانات الواردة فى السؤال الثامن، وحدد اتجاه التواء تلك البيانات .
- ١٩ - استخدم بيانات السؤال الثامن لإيجاد ما يلى :

- أ - الربيع الأدنى .
- ب - الربيع الأعلى .
- ج - العشير الأعلى .
- د - المئينى الأعلى .
- هـ - العشير الأدنى .
- و - السديس الأدنى .

٢٠ - كان سعر كيلو اللحم البقرى فى عواصم دول الخليج فى نفس الشهر على النحو الآتى :

٤,٥ دولار فى المدينة (أ).

٦,٠ دولارات فى المدينة (ب).

٣,٥ دولار فى المدينة (ج).

٥,٠ دولارات فى المدينة (د).

٦,٥ دولار فى المدينة (هـ).

٨ دولارات فى المدينة (و).

أوجد الوسط المناسب للسعر بين تلك المدن.

٢١ - مجموع مربعات ٩ قيم عينية عن وسطها الحسابى يساوى ٦٤. فإذا كان الوسط

الحسابى يساوى ١٢ فأوجد :

أ - مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابى.

ب - مجموع الانحرافات عن قيمة أخرى مقدارها ٨.

ج - مجموع مربعات الانحرافات عن قيمة أخرى مقدارها ١١.

د - مجموع الانحرافات عن قيمة مقدارها ١٦.

هـ - مجموع مربعات الانحرافات عن قيمة مقدارها ١٤.

٢٢ - بلغ تعداد السكان فى إحدى المدن ٦٠٠٠٠ شخص خلال عام ١٤٠٠ هـ. وباعتبار

أن معدل الزيادة السنوية ٥٪، فإن التعداد للسنوات الأربع التالية يكون على النحو

الآتى :

سكان ١٤٠١ هـ = ٦٣٠٠٠ نسمة.

سكان ١٤٠٢ هـ = ٦٦١٥٠ نسمة.

سكان ١٤٠٣ هـ = ٦٩٤٥٨ نسمة.

سكان ١٤٠٤ هـ = ٧٢٩٣٠ نسمة.

أوجد الوسط المناسب لعدد السكان خلال الخمس سنوات.

٢٣ - اكتب برنامج بيسك لإيجاد حلول الأسئلة من (١) إلى (٥).

٢٤ - اكتب برنامج بيسك لإيجاد الوسط الحسابى للبيانات الواردة فى السؤال (٨).

٢٥ - اكتب برنامج بيسك لإيجاد الوسيط لكل مجموعة من المجموعات الواردة فى السؤال

(١).

٢٦ - اكتب برنامج بيسك لإيجاد المنوال للمجموعات الأربع الواردة فى السؤال (١).

٢٧ - باستخدام البيانات الواردة فى السؤال (٨) اكتب برنامج بيسك لإيجاد الآتى :

٢ - الربيع الأعلى.

١ - الربيع الأدنى.





---

## مقاييس التشتت والمزوم

(Measures of Dispersion and Moments)

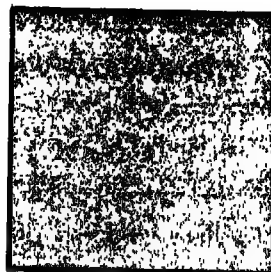
---

الفصل  
الخامس



## مقاييس التشتت والعزوم

(Measures of Dispersion and Moments)



### ١ - المقدمة :

يستخدم مقياس النزعة المركزية لتحديد قيمة نموذجية تتمركز حولها بقية القيم، إلا أن ذلك ليس كافياً لتوضيح الوصف الخاص بالتوزيع التكرارى للبيانات، أو مقارنتها بأى بيانات أخرى. خذ على سبيل المثال المجموعتين التاليتين من البيانات الفرضية :

ص ر	س ر
١	٣
٤	٤
٧	٥

فالوسط الحسابى للمجموعة الأولى يساوى الوسط الحسابى للمجموعة الثانية = ٤ .

غير أن المجموعتين مختلفتان تماماً؛ فالواضح أن مدى المجموعة ص أكبر من مدى المجموعة س. فالفرق بين قيمة الوسط الحسابى والقيم الأخرى فى المجموعة ص يعادل ثلاثة أمثال الفرق المناظر له فى المجموعة س. إذا فتغيرات قيم المجموعة ص حول وسطها، أكبر من تغيرات قيم المجموعة س حول وسطها. أى أن المجموعة الثانية أكثر تباعداً، أو تبايناً أو تشتتاً من المجموعة الأولى.

إذاً لابد من مقاييس كمية لمدى تشتت البيانات فيما بينها، أو حول أى نقطة أخرى؛ لأن مقاييس النزعة المركزية لم توجد أساساً لتعطى تقديرات خاصة بتجانس القيم أو تشتتها. هذا وتسمى مجموعة الإحصائيات الخاصة بالمقاييس الكمية للتشتت بمقاييس التشتت، وأهم هذه المقاييس هى :

RANGE

١ - المدى

QUARTILE DEVIATION

٢ - الانحراف الربيعى

MEAN DEVIATION

٣ - الانحراف المتوسط

STANDARD DEVIATION

٤ - الانحراف المعياري

## ٢ - المدى :

ورد في تعريف الوسيط أنه إذا رتب القيم ترتيباً تصاعدياً بحيث إن :

$$س_١ \geq س_٢ \geq س_٣ \geq \dots \geq س_ن$$

فإن الإحصائية :

أ - س<sub>١</sub> تسمى القيمة الصغرى.

ب - س<sub>ن</sub> تسمى القيمة الكبرى.

(١)

ج - س<sub>ن</sub> - س<sub>١</sub> تسمى المدى.

إذا فالمدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة، إلا أنه بالرغم من سهولته لا يستخدم إلا نادراً؛ لأنه مقياس تقريبي لا يأخذ في الاعتبار إلا قيمتين فقط قد تكونان متطرفتين، كما لا يمكن استخراجه في حالة الفئات المفتوحة. وربما يعتبر أكثر الحالات التي يستخدم فيها المدى هي تكوين الجداول التكرارية، وضبط جودة الإنتاج في المجال الصناعي (خراطة المراقبة).

وقد يكون المدى هو الفرق بين الحد الأدنى للفئة الأولى، والحد الأعلى للفئة العليا (الأخيرة)، في حالة البيانات المبوبة، وقد يكون الفرق أيضاً بين مركز الفئة الأخيرة، ومركز الفئة الأولى، وهناك بعض الحالات التي يستبعد فيها جزء من البيانات ويستخرج المدى لبقية الأجزاء. فإذا استبعدت أعلى وأدنى ١٠٪ من البيانات كان المدى هو الفرق بين المئينين التسعين والمئين العاشر وسمى المدى المئيني. وهذه تستخدم كثيراً لاستبعاد الحالات المتطرفة كما هو الحال في تقديرات الطلاب. أما إذا استبعد الربع الأعلى والربع الأدنى من البيانات فالمدى هنا هو الفرق بين الربع الثالث (٧٥٪) والربع الأول (٢٥٪) وهو ما يسمى بالمدى الربيعي. والمدى المحسوب بعد استبعاد أى قيمة، أو نسبة من البيانات، هو أحد شبيهات المدى.

## ٣ - الانحراف الربيعي :

هو نصف المدى الربيعي، وبذلك يكون

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{(٧٥\% - ٢٥\%)}{٢} \quad (٢)$$

وعليه، فالانحراف الربيعي يعتمد على الجزء الأوسط من ٥٠٪ من البيانات، فإذا كان العيب الرئيسي للمدى هو الاعتماد الكلى على قيمتين متطرفتين أحياناً، فالعيب الرئيسى للانحراف الربيعي هو الإهمال التام لجزء من القيم، فاستبدال عدم التأثير بالقيم الشاذة بعدم دقة المقياس مقارنة بالمقاييس التالية. ويعتبر الانحراف الربيعي مفيداً جداً في حالة التوزيعات ذات الفئات المفتوحة، والتي يمكن استخراج انحرافات الربيعية دون المقاييس الأخرى.

**مثال (١، ٥) :**

أوجد المدى والانحراف الربيعي للبيانات المبوبة التالية :

رقم الفئة	الفئات	كـر	سـر	التجمع الصاعد
١	١٢,٥ - ١٥,٥	٢	١٤	٢
٢	١٥,٥ - ١٨,٥	٣	١٧	٥
٣	١٨,٥ - ٢١,٥	٤	٢٠	٩
٤	٢١,٥ - ٢٤,٥	٥	٢٣	١٤
٥	٢٤,٥ - ٢٧,٥	١٤	٢٦	٢٨
٦	٢٧,٥ - ٣٠,٥	٢١	٢٩	٤٩
٧	٣٠,٥ - ٣٣,٥	٥٩	٣٢	١٠٨
٨	٣٣,٥ - ٣٦,٥	٢٤	٣٥	١٣٢
٩	٣٦,٥ - ٣٩,٥	٧	٣٨	١٣٩
١٠	٣٩,٥ - ٤٢,٥	٦	٤١	١٤٥
١١	٤٢,٥ - ٤٥,٥	٢	٤٤	١٤٧
١٢	٤٥,٥ - ٤٨,٥	١	٤٧	١٤٨
١٣	٤٨,٥ - ٥١,٥	٢	٥٠	١٥٠
المجموع		١٥٠		

**(أ) المدى :**

باعتبار أن المدى هو الفرق بين الحد الأعلى للفئة العليا ناقصاً الحد الأدنى للفئة الدنيا فهو

يساوى :

$$٣٩ = ١٢,٥ - ٥١,٥$$

وباعتبار أنه الفرق بين مركزي الفئتين السالفتين :

$$٣٦ = ١٤ - ٥٠ = \text{المدى}$$

البرنامج التالي يقوم بحساب المدى لبيانات مجمعة والبيانات المستخدمة هي نفسها الواردة  
بالمثال (١) السابق .

10	REM	برنامج لحساب المدى لبيانات مجمعة
20	DIM	A(13),B(13),F(13),C(13)
30	T=0	
40	READ N	REM عدد القيم
50	:	مرکز الفئه
60	:	الفئه
70	:	رقم الفئه
75	PRINT USING 60	###                      ##.## - ##.##                      ##
80	PRINT USING 50	
90	PRINT USING 60	
100	PRINT	
105	FOR I=1 TO N	
110	READ A(I),B(I),F(I)	REM الحد الادنى , الحد الاعلى , التكرار
120	C(I)=(A(I)+B(I))/2	REM مرکز الفئه
130	PRINT USING 70, C(I),B(I),A(I),I	
140	NEXT I	
150	R1=B(N)-A(1)	
160	R2=C(N)-C(1)	
170	PRINT ,R1, ' = ١ المدى '	
180	PRINT ,R2, ' = ٢ المدى '	
190	PRINT	
200	PRINT	
210	PRINT	
220	PRINT	
230	DATA	13, 12, 5, 15, 5, 2, 15, 5, 18, 5, 3, 18, 5, 21, 5, 4, 21, 5, 24, 5, 5
240	DATA	24, 5, 27, 5, 14, 5, 27, 5, 30, 5, 31, 5, 30, 5, 33, 5, 33, 5, 36, 5, 24
250	DATA	36, 5, 39, 5, 7, 39, 5, 42, 5, 6, 42, 5, 45, 5, 2, 45, 5, 48, 5, 1, 48, 5, 51, 5, 2
260	END	

رقم الفئه	الفئه	مرکز الفئه
1	13	14
2	12	12
3	5	10
4	15	15
5	2	10
6	15	15
7	18	18
8	3	15
9	18	18
10	5	10
11	21	21
12	4	18
13	21	21
14	5	15
15	24	24
16	5	15
17	27	27
18	5	15
19	30	30
20	5	15
21	31	31
22	5	15
23	30	30
24	5	15
25	33	33
26	5	15
27	33	33
28	5	15
29	36	36
30	5	15
31	24	24
32	5	15
33	27	27
34	5	15
35	39	39
36	5	15
37	42	42
38	5	15
39	6	18
40	42	42
41	5	15
42	45	45
43	5	15
44	2	10
45	45	45
46	5	15
47	48	48
48	5	15
49	1	14
50	48	48
51	5	15
52	51	51
53	2	10

39	= ١ المدى
36	= ٢ المدى

(ب) الانحراف الربيعي :

كانت نتائج المثال (١٥) في الفصل السابق كما يلي :

$$٣٤,٠٦٣ = \%٧٥$$

$$٢٨,٨٥٧ = \%٢٥$$

$$(٢) \quad \frac{\%٢٥ - \%٧٥}{٢} = \text{الانحراف الربيعي}$$

$$٢,٦٠٣ =$$

وفيما يلي برنامج حساب الانحراف الربيعي للبيانات الواردة في نفس المثال والمثال السابق ،  
 علماً بأن معادلة الانحراف الربيعي المستخدمة هي :

$$Y = \frac{(Q_1 - Q_3)}{2}$$

حيث :

$Y$  = الانحراف الربيعي

$Q_1$  = الربع الأعلى

$Q_3$  = الربع الأدنى

كما أن :

$$Q(I) = L(I) + \frac{(S(I) - O(I))P(I)}{W(I)}$$

كما ورد في برنامج حساب الربيعات في نهاية الفصل الماضي .

```

10 REM برنامج لحساب الانحراف الربيعي لبيانات مجمعة
20 DIM A(13),B(13),C(13),D(13),E(13),F(13),G(13)
30 T=0
40 READ N
50 FOR I=1 TO N
60 READ A(I),B(I),F(I) REM الحد الاعلى، الحد الادنى، والتكرار
70 T=T+F(I) REM مجموع التكرارات
80 NEXT I
90 C(1)=F(1)
100 FOR I=2 TO N
110 C(I)=C(I-1)+F(I)
120 NEXT I
130
140
150
160
170
180
185 PRINT USING 150
190 PRINT USING 130
200 PRINT USING 140
210 PRINT USING 150
220 PRINT
230 FOR I=1 TO N
240 PRINT USING 160, C(I);F(I),B(I),A(I),I
250 NEXT I
260 PRINT USING 170
270 PRINT USING 180 ,T
280 PRINT
290 S1=T*3/4
300 S3=T*4/4
310 FOR I=1 TO N
320 IF C(I)>S1 THEN 340
330 J=I
340 NEXT I
350 FOR I=1 TO N

```

الرقم	العلامة	التكرار	التجمع التكراري
###	###.# - ###.#	##	###
المجموع		###	

```

360 IF C(I)>S3 THEN 380
370 V=I
380 NEXT I
390 PRINT USING 430, B(J+1),A(J+1),J+1
400 PRINT
410 PRINT USING 440, B(V+1),A(V+1),V+1
420 PRINT
430 :
440 :      ##.## - ##.## وهي ## الفئة رقم
450 :      ##.## - ##.## وهي ## الفئة رقم
460 GOSUB 610
470 Q1=FNA(L1,S1,O1,P1,W1)
480 PRINT ,Q1; '= الأعلى '
490 PRINT
500 GOSUB 660
510 Q3=FNA(L3,S3,O3,P3,W3)
520 PRINT ,Q3; '= الأدنى '
530 PRINT
540 Y=(Q1-Q3)/2
550 PRINT ,Y; '= الانحراف الربيعي '
560 PRINT
570 STOP
580 L1=A(J+1)
590 O1=C(J)
600 P1=B(J)-A(J)
610 W1=F(J+1)
620 RETURN
630 L3=A(V+1)
640 O3=C(V)
650 P3=B(V)-A(V)
660 W3=F(V+1)
670 RETURN
680 DEF FNA(L,X,O,P,W)=L+((X-O)*P)/W
690 DATA 13,12,6,15,18
700 DATA 22,15,27,15,30
710 DATA 36,39,39,39,42
720 DATA 45,45,45,45,45
730 DATA 55,55,55,55,55
740 DATA 65,65,65,65,65
750 DATA 75,75,75,75,75
760 DATA 85,85,85,85,85
770 DATA 95,95,95,95,95
780 DATA 105,105,105,105,105
790 DATA 115,115,115,115,115
800 DATA 125,125,125,125,125
810 DATA 135,135,135,135,135
820 DATA 145,145,145,145,145
830 DATA 155,155,155,155,155
840 DATA 165,165,165,165,165
850 DATA 175,175,175,175,175
860 DATA 185,185,185,185,185
870 DATA 195,195,195,195,195
880 DATA 205,205,205,205,205
890 DATA 215,215,215,215,215
900 DATA 225,225,225,225,225
910 DATA 235,235,235,235,235
920 DATA 245,245,245,245,245
930 DATA 255,255,255,255,255
940 DATA 265,265,265,265,265
950 DATA 275,275,275,275,275
960 DATA 285,285,285,285,285
970 DATA 295,295,295,295,295
980 DATA 305,305,305,305,305
990 DATA 315,315,315,315,315
1000 DATA 325,325,325,325,325
1010 DATA 335,335,335,335,335
1020 DATA 345,345,345,345,345
1030 DATA 355,355,355,355,355
1040 DATA 365,365,365,365,365
1050 DATA 375,375,375,375,375
1060 DATA 385,385,385,385,385
1070 DATA 395,395,395,395,395
1080 DATA 405,405,405,405,405
1090 DATA 415,415,415,415,415
1100 DATA 425,425,425,425,425
1110 DATA 435,435,435,435,435
1120 DATA 445,445,445,445,445
1130 DATA 455,455,455,455,455
1140 DATA 465,465,465,465,465
1150 DATA 475,475,475,475,475
1160 DATA 485,485,485,485,485
1170 DATA 495,495,495,495,495
1180 DATA 505,505,505,505,505
1190 DATA 515,515,515,515,515
1200 DATA 525,525,525,525,525
1210 DATA 535,535,535,535,535
1220 DATA 545,545,545,545,545
1230 DATA 555,555,555,555,555
1240 DATA 565,565,565,565,565
1250 DATA 575,575,575,575,575
1260 DATA 585,585,585,585,585
1270 DATA 595,595,595,595,595
1280 DATA 605,605,605,605,605
1290 DATA 615,615,615,615,615
1300 DATA 625,625,625,625,625
1310 DATA 635,635,635,635,635
1320 DATA 645,645,645,645,645
1330 DATA 655,655,655,655,655
1340 DATA 665,665,665,665,665
1350 DATA 675,675,675,675,675
1360 DATA 685,685,685,685,685
1370 DATA 695,695,695,695,695
1380 DATA 705,705,705,705,705
1390 DATA 715,715,715,715,715
1400 DATA 725,725,725,725,725
1410 DATA 735,735,735,735,735
1420 DATA 745,745,745,745,745
1430 DATA 755,755,755,755,755
1440 DATA 765,765,765,765,765
1450 DATA 775,775,775,775,775
1460 DATA 785,785,785,785,785
1470 DATA 795,795,795,795,795
1480 DATA 805,805,805,805,805
1490 DATA 815,815,815,815,815
1500 DATA 825,825,825,825,825
1510 DATA 835,835,835,835,835
1520 DATA 845,845,845,845,845
1530 DATA 855,855,855,855,855
1540 DATA 865,865,865,865,865
1550 DATA 875,875,875,875,875
1560 DATA 885,885,885,885,885
1570 DATA 895,895,895,895,895
1580 DATA 905,905,905,905,905
1590 DATA 915,915,915,915,915
1600 DATA 925,925,925,925,925
1610 DATA 935,935,935,935,935
1620 DATA 945,945,945,945,945
1630 DATA 955,955,955,955,955
1640 DATA 965,965,965,965,965
1650 DATA 975,975,975,975,975
1660 DATA 985,985,985,985,985
1670 DATA 995,995,995,995,995
1680 DATA 1005,1005,1005,1005,1005
1690 DATA 1015,1015,1015,1015,1015
1700 DATA 1025,1025,1025,1025,1025
1710 DATA 1035,1035,1035,1035,1035
1720 DATA 1045,1045,1045,1045,1045
1730 DATA 1055,1055,1055,1055,1055
1740 DATA 1065,1065,1065,1065,1065
1750 DATA 1075,1075,1075,1075,1075
1760 DATA 1085,1085,1085,1085,1085
1770 DATA 1095,1095,1095,1095,1095
1780 DATA 1105,1105,1105,1105,1105
1790 DATA 1115,1115,1115,1115,1115
1800 DATA 1125,1125,1125,1125,1125
1810 DATA 1135,1135,1135,1135,1135
1820 DATA 1145,1145,1145,1145,1145
1830 DATA 1155,1155,1155,1155,1155
1840 DATA 1165,1165,1165,1165,1165
1850 DATA 1175,1175,1175,1175,1175
1860 DATA 1185,1185,1185,1185,1185
1870 DATA 1195,1195,1195,1195,1195
1880 DATA 1205,1205,1205,1205,1205
1890 DATA 1215,1215,1215,1215,1215
1900 DATA 1225,1225,1225,1225,1225
1910 DATA 1235,1235,1235,1235,1235
1920 DATA 1245,1245,1245,1245,1245
1930 DATA 1255,1255,1255,1255,1255
1940 DATA 1265,1265,1265,1265,1265
1950 DATA 1275,1275,1275,1275,1275
1960 DATA 1285,1285,1285,1285,1285
1970 DATA 1295,1295,1295,1295,1295
1980 DATA 1305,1305,1305,1305,1305
1990 DATA 1315,1315,1315,1315,1315
2000 DATA 1325,1325,1325,1325,1325
2010 DATA 1335,1335,1335,1335,1335
2020 DATA 1345,1345,1345,1345,1345
2030 DATA 1355,1355,1355,1355,1355
2040 DATA 1365,1365,1365,1365,1365
2050 DATA 1375,1375,1375,1375,1375
2060 DATA 1385,1385,1385,1385,1385
2070 DATA 1395,1395,1395,1395,1395
2080 DATA 1405,1405,1405,1405,1405
2090 DATA 1415,1415,1415,1415,1415
2100 DATA 1425,1425,1425,1425,1425
2110 DATA 1435,1435,1435,1435,1435
2120 DATA 1445,1445,1445,1445,1445
2130 DATA 1455,1455,1455,1455,1455
2140 DATA 1465,1465,1465,1465,1465
2150 DATA 1475,1475,1475,1475,1475
2160 DATA 1485,1485,1485,1485,1485
2170 DATA 1495,1495,1495,1495,1495
2180 DATA 1505,1505,1505,1505,1505
2190 DATA 1515,1515,1515,1515,1515
2200 DATA 1525,1525,1525,1525,1525
2210 DATA 1535,1535,1535,1535,1535
2220 DATA 1545,1545,1545,1545,1545
2230 DATA 1555,1555,1555,1555,1555
2240 DATA 1565,1565,1565,1565,1565
2250 DATA 1575,1575,1575,1575,1575
2260 DATA 1585,1585,1585,1585,1585
2270 DATA 1595,1595,1595,1595,1595
2280 DATA 1605,1605,1605,1605,1605
2290 DATA 1615,1615,1615,1615,1615
2300 DATA 1625,1625,1625,1625,1625
2310 DATA 1635,1635,1635,1635,1635
2320 DATA 1645,1645,1645,1645,1645
2330 DATA 1655,1655,1655,1655,1655
2340 DATA 1665,1665,1665,1665,1665
2350 DATA 1675,1675,1675,1675,1675
2360 DATA 1685,1685,1685,1685,1685
2370 DATA 1695,1695,1695,1695,1695
2380 DATA 1705,1705,1705,1705,1705
2390 DATA 1715,1715,1715,1715,1715
2400 DATA 1725,1725,1725,1725,1725
2410 DATA 1735,1735,1735,1735,1735
2420 DATA 1745,1745,1745,1745,1745
2430 DATA 1755,1755,1755,1755,1755
2440 DATA 1765,1765,1765,1765,1765
2450 DATA 1775,1775,1775,1775,1775
2460 DATA 1785,1785,1785,1785,1785
2470 DATA 1795,1795,1795,1795,1795
2480 DATA 1805,1805,1805,1805,1805
2490 DATA 1815,1815,1815,1815,1815
2500 DATA 1825,1825,1825,1825,1825
2510 DATA 1835,1835,1835,1835,1835
2520 DATA 1845,1845,1845,1845,1845
2530 DATA 1855,1855,1855,1855,1855
2540 DATA 1865,1865,1865,1865,1865
2550 DATA 1875,1875,1875,1875,1875
2560 DATA 1885,1885,1885,1885,1885
2570 DATA 1895,1895,1895,1895,1895
2580 DATA 1905,1905,1905,1905,1905
2590 DATA 1915,1915,1915,1915,1915
2600 DATA 1925,1925,1925,1925,1925
2610 DATA 1935,1935,1935,1935,1935
2620 DATA 1945,1945,1945,1945,1945
2630 DATA 1955,1955,1955,1955,1955
2640 DATA 1965,1965,1965,1965,1965
2650 DATA 1975,1975,1975,1975,1975
2660 DATA 1985,1985,1985,1985,1985
2670 DATA 1995,1995,1995,1995,1995
2680 DATA 2005,2005,2005,2005,2005
2690 DATA 2015,2015,2015,2015,2015
2700 DATA 2025,2025,2025,2025,2025
2710 DATA 2035,2035,2035,2035,2035
2720 DATA 2045,2045,2045,2045,2045
2730 DATA 2055,2055,2055,2055,2055
2740 DATA 2065,2065,2065,2065,2065
2750 DATA 2075,2075,2075,2075,2075
2760 DATA 2085,2085,2085,2085,2085
2770 DATA 2095,2095,2095,2095,2095
2780 DATA 2105,2105,2105,2105,2105
2790 DATA 2115,2115,2115,2115,2115
2800 DATA 2125,2125,2125,2125,2125
2810 DATA 2135,2135,2135,2135,2135
2820 DATA 2145,2145,2145,2145,2145
2830 DATA 2155,2155,2155,2155,2155
2840 DATA 2165,2165,2165,2165,2165
2850 DATA 2175,2175,2175,2175,2175
2860 DATA 2185,2185,2185,2185,2185
2870 DATA 2195,2195,2195,2195,2195
2880 DATA 2205,2205,2205,2205,2205
2890 DATA 2215,2215,2215,2215,2215
2900 DATA 2225,2225,2225,2225,2225
2910 DATA 2235,2235,2235,2235,2235
2920 DATA 2245,2245,2245,2245,2245
2930 DATA 2255,2255,2255,2255,2255
2940 DATA 2265,2265,2265,2265,2265
2950 DATA 2275,2275,2275,2275,2275
2960 DATA 2285,2285,2285,2285,2285
2970 DATA 2295,2295,2295,2295,2295
2980 DATA 2305,2305,2305,2305,2305
2990 DATA 2315,2315,2315,2315,2315
3000 DATA 2325,2325,2325,2325,2325
3010 DATA 2335,2335,2335,2335,2335
3020 DATA 2345,2345,2345,2345,2345
3030 DATA 2355,2355,2355,2355,2355
3040 DATA 2365,2365,2365,2365,2365
3050 DATA 2375,2375,2375,2375,2375
3060 DATA 2385,2385,2385,2385,2385
3070 DATA 2395,2395,2395,2395,2395
3080 DATA 2405,2405,2405,2405,2405
3090 DATA 2415,2415,2415,2415,2415
3100 DATA 2425,2425,2425,2425,2425
3110 DATA 2435,2435,2435,2435,2435
3120 DATA 2445,2445,2445,2445,2445
3130 DATA 2455,2455,2455,2455,2455
3140 DATA 2465,2465,2465,2465,2465
3150 DATA 2475,2475,2475,2475,2475
3160 DATA 2485,2485,2485,2485,2485
3170 DATA 2495,2495,2495,2495,2495
3180 DATA 2505,2505,2505,2505,2505
3190 DATA 2515,2515,2515,2515,2515
3200 DATA 2525,2525,2525,2525,2525
3210 DATA 2535,2535,2535,2535,2535
3220 DATA 2545,2545,2545,2545,2545
3230 DATA 2555,2555,2555,2555,2555
3240 DATA 2565,2565,2565,2565,2565
3250 DATA 2575,2575,2575,2575,2575
3260 DATA 2585,2585,2585,2585,2585
3270 DATA 2595,2595,2595,2595,2595
3280 DATA 2605,2605,2605,2605,2605
3290 DATA 2615,2615,2615,2615,2615
3300 DATA 2625,2625,2625,2625,2625
3310 DATA 2635,2635,2635,2635,2635
3320 DATA 2645,2645,2645,2645,2645
3330 DATA 2655,2655,2655,2655,2655
3340 DATA 2665,2665,2665,2665,2665
3350 DATA 2675,2675,2675,2675,2675
3360 DATA 2685,2685,2685,2685,2685
3370 DATA 2695,2695,2695,2695,2695
3380 DATA 2705,2705,2705,2705,2705
3390 DATA 2715,2715,2715,2715,2715
3400 DATA 2725,2725,2725,2725,2725
3410 DATA 2735,2735,2735,2735,2735
3420 DATA 2745,2745,2745,2745,2745
3430 DATA 2755,2755,2755,2755,2755
3440 DATA 2765,2765,2765,2765,2765
3450 DATA 2775,2775,2775,2775,2775
3460 DATA 2785,2785,2785,2785,2785
3470 DATA 2795,2795,2795,2795,2795
3480 DATA 2805,2805,2805,2805,2805
3490 DATA 2815,2815,2815,2815,2815
3500 DATA 2825,2825,2825,2825,2825
3510 DATA 2835,2835,2835,2835,2835
3520 DATA 2845,2845,2845,2845,2845
3530 DATA 2855,2855,2855,2855,2855
3540 DATA 2865,2865,2865,2865,2865
3550 DATA 2875,2875,2875,2875,2875
3560 DATA 2885,2885,2885,2885,2885
3570 DATA 2895,2895,2895,2895,2895
3580 DATA 2905,2905,2905,2905,2905
3590 DATA 2915,2915,2915,2915,2915
3600 DATA 2925,2925,2925,2925,2925
3610 DATA 2935,2935,2935,2935,2935
3620 DATA 2945,2945,2945,2945,2945
3630 DATA 2955,2955,2955,2955,2955
3640 DATA 2965,2965,2965,2965,2965
3650 DATA 2975,2975,2975,2975,2975
3660 DATA 2985,2985,2985,2985,2985
3670 DATA 2995,2995,2995,2995,2995
3680 DATA 3005,3005,3005,3005,3005
3690 DATA 3015,3015,3015,3015,3015
3700 DATA 3025,3025,3025,3025,3025
3710 DATA 3035,3035,3035,3035,3035
3720 DATA 3045,3045,3045,3045,3045
3730 DATA 3055,3055,3055,3055,3055
3740 DATA 3065,3065,3065,3065,3065
3750 DATA 3075,3075,3075,3075,3075
3760 DATA 3085,3085,3085,3085,3085
3770 DATA 3095,3095,3095,3095,3095
3780 DATA 3105,3105,3105,3105,3105
3790 DATA 3115,3115,3115,3115,3115
3800 DATA 3125,3125,3125,3125,3125
3810 DATA 3135,3135,3135,3135,3135
3820 DATA 3145,3145,3145,3145,3145
3830 DATA 3155,3155,3155,3155,3155
3840 DATA 3165,3165,3165,3165,3165
3850 DATA 3175,3175,3175,3175,3175
3860 DATA 3185,3185,3185,3185,3185
3870 DATA 3195,3195,3195,3195,3195
3880 DATA 3205,3205,3205,3205,3205
3890 DATA 3215,3215,3215,3215,3215
3900 DATA 3225,3225,3225,3225,3225
3910 DATA 3235,3235,3235,3235,3235
3920 DATA 3245,3245,3245,3245,3245
3930 DATA 3255,3255,3255,3255,3255
3940 DATA 3265,3265,3265,3265,3265
3950 DATA 3275,3275,3275,3275,3275
3960 DATA 3285,3285,3285,3285,3285
3970 DATA 3295,3295,3295,3295,3295
3980 DATA 3305,3305,3305,3305,3305
3990 DATA 3315,3315,3315,3315,3315
4000 DATA 3325,3325,3325,3325,3325
4010 DATA 3335,3335,3335,3335,3335
4020 DATA 3345,3345,3345,3345,3345
4030 DATA 3355,3355,3355,3355,3355
4040 DATA 3365,3365,3365,3365,3365
4050 DATA 3375,3375,3375,3375,3375
4060 DATA 3385,3385,3385,3385,3385
4070 DATA 3395,3395,3395,3395,3395
4080 DATA 3405,3405,3405,3405,3405
4090 DATA 3415,3415,3415,3415,3415
4100 DATA 3425,3425,3425,3425,3425
4110 DATA 3435,3435,3435,3435,3435
4120 DATA 3445,3445,3445,3445,3445
4130 DATA 3455,3455,3455,3455,3455
4140 DATA 3465,3465,3465,3465,3465
4150 DATA 3475,3475,3475,3475,3475
4160 DATA 3485,3485,3485,3485,3485
4170 DATA 3495,3495,3495,3495,3495
4180 DATA 3505,3505,3505,3505,3505
4190 DATA 3515,3515,3515,3515,3515
4200 DATA 3525,3525,3525,3525,3525
4210 DATA 3535,3535,3535,3535,3535
4220 DATA 3545,3545,3545,3545,3545
4230 DATA 3555,3555,3555,3555,3555
4240 DATA 3565,3565,3565,3565,3565
4250 DATA 3575,3575,3575,3575,3575
4260 DATA 3585,3585,3585,3585,3585
4270 DATA 3595,3595,3595,3595,3595
4280 DATA 3605,3605,3605,3605,3605
4290 DATA 3615,3615,3615,3615,3615
4300 DATA 3625,3625,3625,3625,3625
4310 DATA 3635,3635,3635,3635,3635
4320 DATA 3645,3645,3645,3645,3645
4330 DATA 3655,3655,3655,3655,3655
4340 DATA 3665,3665,3665,3665,3665
4350 DATA 3675,3675,3675,3675,3675
4360 DATA 3685,3685,3685,3685,3685
4370 DATA 3695,3695,3695,3695,3695
4380 DATA 3705,3705,3705,3705,3705
4390 DATA 3715,3715,3715,3715,3715
4400 DATA 3725,3725,3725,3725,3725
4410 DATA 3735,3735,3735,3735,3735
4420 DATA 3745,3745,3745,3745,3745
4430 DATA 3755,3755,3755,3755,3755
4440 DATA 3765,3765,3765,3765,3765
4450 DATA 3775,3775,3775,3775,3775
4460 DATA 3785,3785,3785,3785,3785
4470 DATA 3795,3795,3795,3795,3795
4480 DATA 3805,3805,3805,3805,3805
4490 DATA 3815,3815,3815,3815,3815
4500 DATA 3825,3825,3825,3825,3825
4510 DATA 3835,3835,3835,3835,3835
4520 DATA 3845,3845,3845,3845,3845
4530 DATA 3855,3855,3855,3855,3855
4540 DATA 3865,3865,3865,3865,3865
4550 DATA 3875,3875,3875,3875,3875
4560 DATA 3885,3885,3885,3885,3885
4570 DATA 3895,3895,3895,3895,3895
4580 DATA 3905,3905,3905,3905,3905
4590 DATA 3915,3915,3915,3915,3915
4600 DATA 3925,3925,3925,3925,3925
4610 DATA 3935,3935,3935,3935,3935
4620 DATA 3945,3945,3945,3945,3945
4630 DATA 3955,3955,3955,3955,3955
4640 DATA 3965,3965,3965,3965,3965
4650 DATA 3975,3975,3975,3975,3975
4660 DATA 3985,3985,3985,3985,3985
4670 DATA 3995,3995,3995,3995,3995
4680 DATA 4005,4005,4005,4005,4005
4690 DATA 4015,4015,4015,4015,4015
4700 DATA 4025,4025,4025,4025,4025
4710 DATA 4035,4035,4035,4035,4035
4720 DATA 404
```



#### ٤ - الانحراف المتوسط :

هو مجموع القيم المطلقة للانحرافات عن الوسط الحسابي مقسوماً على عددها، والقيمة المطلقة (Absolute Value) هي :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} - \end{array} \right\} = | \text{س} |$$

إذا كانت س  $\leq$  صفراً  
إذا كانت س  $>$  صفراً

وهذا معناه إهمال الإشارة السالبة، واعتبار الانحراف يمثل بعداً لا يهم اتجاهه . بذلك يكون :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\sum_{i=1}^n | \text{س}_i - \bar{\text{س}} |}{n} \quad (3)$$

والسبب في أخذ القيمة المطلقة لكل انحراف هو أن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي يساوى صفراً، كما سبق وأثبت في الفصل الماضي . وبالرغم من أن الانحراف المتوسط يأخذ في الاعتبار جميع القيم - وهذا ما يميزه عن المدى والانحراف الربيعي - فإن عمليات استخراج شاقة، ومعادلته غير قابلة للتعامل الجبري، إضافة إلى العيب الرئيسي وهو إهمال الإشارات، مما جعله من المقاييس غير الدقيقة . كل ذلك جعل استخدام الانحراف المتوسط في المجالات التطبيقية يكاد يكون معدوماً.

**مثال (٢، ٥) :**

أوجد الانحراف المتوسط للقيم :

٢، ١، ٣، ٦، ٨، ٤

**الحل :**

$$n = 6, \quad \bar{\text{س}} = 4$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{1 + 4 + 2 + 1 + 3 + 2}{6} = 2$$

أما في حالة التوزيعات التكرارية فالانحراف المتوسط هو :

$$\frac{|س_١ - س_١ ك| + |س_٢ - س_٢ ك| + |س_٣ - س_٣ ك| + \dots + |س_٣ - س_٣ ك|}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + \dots + ك_٣}$$

$$(٤) \quad \frac{\sum_{ر=١}^ف |س_ر - س_ر ك|}{ن} =$$

حيث ف هو عدد الفئات و س<sub>ر</sub> هي مراكز الفئات .

مثال (٣، ٥) :

أوجد الانحراف المتوسط للبيانات التالية :

رقم الفئة	الفئة	ك <sub>ر</sub>	س <sub>ر</sub>	س <sub>ر</sub> - س <sub>ر</sub> *	س <sub>ر</sub> - س <sub>ر</sub> ك <sub>ر</sub>
١	١٥,٥ - ١٢,٥	٢	١٤	١٧,٤٨ -	٣٤,٩٦
٢	١٨,٥ - ١٥,٥	٣	١٧	١٤,٤٨ -	٤٣,٤٤
٣	٢١,٥ - ١٨,٥	٤	٢٠	١١,٤٨ -	٤٥,٩٢
٤	٢٤,٥ - ٢١,٥	٥	٢٣	٨,٤٨ -	٤٢,٤٠
٥	٢٧,٥ - ٢٤,٥	١٤	٢٦	٥,٤٨ -	٧٦,٧٢
٦	٣٠,٥ - ٢٧,٥	٢١	٢٩	٢,٤٨	٥٢,٠٨
٧	٣٣,٥ - ٣٠,٥	٥٩	٣٢	٠,٥٢	٣٠,٦٨
٨	٣٦,٥ - ٣٣,٥	٢٤	٣٥	٣,٥٢	٨٤,٤٨
٩	٣٩,٥ - ٣٦,٥	٧	٣٨	٦,٥٢	٤٥,٦٤
١٠	٤٢,٥ - ٣٩,٥	٦	٤١	٩,٥٢	٥٧,١٢
١١	٤٥,٥ - ٤٢,٥	٢	٤٤	١٢,٥٢	٢٥,٠٤
١٢	٤٨,٥ - ٤٥,٥	١	٤٧	١٥,٥٢	١٥,٥٢
١٣	٥١,٥ - ٤٨,٥	٢	٥٠	١٨,٥٢	٣٧,٠٤
المجموع		١٥٠			٥٩١,٠٤

\* س<sub>ر</sub> = ٣١,٤٨ من مثال (٢) في الفصل السابق .

$$\frac{\sum_{j=1}^{13} |س_r - س| ك_r}{ن} = \text{الانحراف المتوسط}$$

$$\frac{٥٩١,٠٤}{١٥٠} = \text{الانحراف المتوسط}$$

$$٣,٩٤ =$$

### ٥ - الانحراف المعياري :

هناك طريقة أخرى للتخلص من الإشارات السالبة للانحرافات عن الوسط الحسابي، وهي بتربيع تلك الانحرافات لتصبح جميعها موجبة ويكون مجموعها على النحو التالي :

$$\sum (س_r - س)^2 \quad (٥)$$

يسمى متوسط مجموع مربعات الانحرافات المذكورة أعلاه بالتباين (ع<sup>٢</sup>). إلا أنه، ولاعتبارات خاصة بالاستدلال الإحصائي، قد عدل تعديلاً طفيفاً ليصبح (ن - ١) بدلاً من (ن)، بذلك يكون تباين مفردات العينة هو :

$$\frac{\sum_{j=1}^n (س_r - س)^2}{(ن - ١)} = ع^2 \quad (٦)$$

الفرض أن وحدة قياس القيم العينية كانت بالأمتار، إذا فوحدة قياس الوسط الحسابي أيضاً بالأمتار. أما وحدة قياس التباين فهي الأمتار المربعة، ولكي تتوافق وحدة قياس التشتت مع وحدة قياس الوسط الحسابي والقيم العينية، فقد أخذ بالجذر التربيعي للتباين وسمى الانحراف المعياري (ع).

وعليه يكون الانحراف المعياري هو :

$$\sqrt{\frac{\sum (س_r - س)^2}{ن - ١}} = ع \quad (٧)$$



وبذلك يكون :

$$\frac{\sum (S_r)^2}{N} - \sum S_r^2 = E^2$$

(٩)

فيما يلي برنامج لحساب التباين والانحراف المعياري للقيم العينية الواردة في المثال (٤) السابق علماً بأن المعادلة المستخدمة هنا هي :

$$V = \frac{T}{(N-1)}$$

حيث :

V = التباين  
T = مجموع مربعات الانحرافات  
N = عدد المتغيرات

$$R = \sqrt{V}$$

وبالتالي فإن :

حيث :

R = الانحراف المعياري

```

10 REM برنامج لحساب التباين والانحراف المعياري لمجموع مفردات
20 DIM X(17)
30 S=0
40 READ N REM عدد القيم
50 FOR I=1 TO N
60 READ X(I)
70 S=S+X(I)
80 NEXT I
90 M=S/N
100 PRINT USING 300
105 PRINT USING 290
110 PRINT USING 300
120 PRINT
130 FOR I=1 TO N
140 D=X(I)-M
150 T=T+D**2
160 PRINT USING 310,X(I),D,D**2
170 NEXT I
180 PRINT
190 PRINT USING 320
200 PRINT USING 330,T
220 PRINT
230 V=T/(N-1)
240 R=SQR(V)
250 PRINT 'التباين',V
255 PRINT
260 PRINT 'الانحراف المعياري',R
270 PRINT
280 PRINT
290 :
300 :
310 :
320 :
330 :
340 DATA 17,16,22,21,20,23,21,19,15,13,23,17,20,29,18,22,16,25
350 END

```

البيانات	س - س	س - س	البيانات
17, 16, 22, 21, 20, 23, 21, 19, 15, 13, 23, 17, 20, 29, 18, 22, 16, 25	###	##	##
	####		

المخرجات		
القيمة س	س - س	س - س - ٢
16	-4	16
4	2	2
1	1	1
0	0	0
0	3	3
1	1	1
1	1	1
1	1	1
5	1	1
5	1	1
2	1	1
5	1	1
3	1	1
3	1	1
1	1	1
7	1	1
0	1	1
0	1	1
0	1	1
8	1	1
2	1	1
2	1	1
2	1	1
6	1	1
5	1	1
25	5	25
المجموع		254
التباين = 15.875		
الانحراف المعياري = 3.984344		

أما في حالة التوزيعات التكرارية فترجح مربعات الانحرافات بتكراراتها ليصبح على النحو التالي :

$$(١٠) \quad \frac{\sum_{r=1}^n (س_r - س)^2 ك_r}{١ - ن} = ع^٢$$

وهذه أيضاً يمكن تعديلها ليكون التباين :

$$(١١) \quad \frac{\sum_{r=1}^n (س_r ك_r)^2 - \frac{(\sum_{r=1}^n س_r ك_r)^2}{ن}}{١ - ن} = ع^٢$$

مثال (٥, ٥) :

أوجد التباين والانحراف المعياري للبيانات الواردة أدناه :

رقم الفئة	الفئات	ك <sub>ر</sub>	س <sub>ر</sub>	س <sub>ر</sub> ك <sub>ر</sub>	س <sub>ر</sub> <sup>٢</sup>	س <sub>ر</sub> ك <sub>ر</sub> <sup>٢</sup>
١	١٢,٥ - ١٥,٥	٢	١٤	٢٨	١٩٦	٣٩٢
٢	١٥,٥ - ١٨,٥	٣	١٧	٥١	٢٨٩	٨٦٧
٣	١٨,٥ - ٢١,٥	٤	٢٠	٨٠	٤٠٠	١٦٠٠
٤	٢١,٥ - ٢٤,٥	٥	٢٣	١١٥	٥٢٩	٢٦٤٥
٥	٢٤,٥ - ٢٧,٥	١٤	٢٦	٣٦٤	٦٧٦	٩٤٦٤
٦	٢٧,٥ - ٣٠,٥	٢١	٢٩	٦٠٩	٨٤١	١٧٦٦١
٧	٣٠,٥ - ٣٣,٥	٥٩	٣٢	١٨٨٨	١٠٢٤	٦٠٤١٦
٨	٣٣,٥ - ٣٦,٥	٢٤	٣٥	٨٤٠	١٢٢٥	٢٩٤٠٠
٩	٣٦,٥ - ٣٩,٥	٧	٣٨	٢٦٦	١٤٤٤	١٠١٠٨
١٠	٣٩,٥ - ٤٢,٥	٦	٤١	٢٤٦	١٦٨١	١٠٠٨٦
١١	٤٢,٥ - ٤٥,٥	٢	٤٤	٨٨	١٩٣٦	٣٨٧٢
١٢	٤٥,٥ - ٤٨,٥	١	٤٧	٤٧	٢٢٠٩	٢٢٠٩
١٣	٤٨,٥ - ٥١,٥	٢	٥٠	١٠٠	٢٥٠٠	٥٠٠٠
المجموع		١٥٠		٤٧٢٢		١٥٣٧٢٠

$$\frac{\frac{4722 \times 4722}{150} - 153720}{149} = ع^2$$

$$34,03651 = ع^2 \therefore$$

$$5,834 = ع$$

يتضح من المعادلات السابقة أن قيمة التباين لا تكون إلا موجبة ؛ لأن البسط عبارة عن مجموع مربعات، والمربعات لا تكون إلا موجبة ؛ لذا فإن أقل قيمة للتباين هي الصفر. وهذه لا تتحقق إلا في حالة واحدة، وهي عندما تكون القيم متساوية تماماً، وهذا يعني التجانس التام بين القيم، أما أعلى قيمة له فلا حدود لها.

هذا وتجدر الإشارة هنا إلى أن التباين يتناقص مع زيادة حجم العينة (ن)، كما هو واضح من المعادلات السالفة الذكر.

لحساب التباين والانحراف المعياري لبيانات مبوبة، فإننا نستخدم البرنامج التالي للبيانات الواردة بالمثال (٥) وباستخدام المعادلة :

$$V = \frac{\left( T_3 - \frac{(T_2)^2}{T_1} \right)}{T_1 - 1}$$

حيث :

V = التباين

T<sub>3</sub> = مجموع مربعات مراكز الفئات مرجحة بتكراراتها

T<sub>2</sub> = مجموع مراكز الفئات مرجحة بتكراراتها

T<sub>1</sub> = مجموع التكرارات

وكذلك

$$R = \sqrt{V}$$

حيث :

R = الانحراف المعياري



```

10 REM برنامج لحساب التباين والانحراف المعياري لبيانات مبوية
20 DIM A(13),B(13),C(13),D(13),E(13),F(13),G(13)
30 F1=0
40 READ N REM عدد المشاهدات
50 FOR I=1 TO N
60 READ A(I),B(I),F(I) REM الحد الأدنى, الحد الأعلى, التكرار
70 NEXT I
80 PRINT USING 320
90 PRINT USING 300
100 PRINT USING 310
110 PRINT USING 320
120 PRINT
130 FOR I=1 TO N
140 C(I)=(A(I)+B(I))/2
150 D(I)=C(I)*F(I)
160 E(I)=C(I)**2
170 F(I)=D(I)*F(I)
180 G(I)=E(I)*F(I)
190 H(I)=C(I)**3
200 I1=SUM(C(I))
210 I2=SUM(D(I))
220 I3=SUM(E(I))
230 I4=SUM(F(I))
240 I5=SUM(G(I))
250 PRINT USING 330, E(I),D(I),G(I),C(I),F(I),B(I),A(I),I
260 NEXT I
270 PRINT USING 340
280 PRINT USING 350,T3,T2,T1
290 V=(T3-T2**2/T1)/(T1-1)
300 R=SQRT(V)
310 PRINT
320 PRINT
330 PRINT 'التباين' V;
340 PRINT
350 PRINT 'الانحراف المعياري' R;
360 PRINT
370 PRINT
380 PRINT
390 PRINT
400 PRINT
410 PRINT
420 PRINT
430 PRINT
440 PRINT
450 PRINT
460 PRINT
470 PRINT
480 PRINT
490 PRINT
500 PRINT
510 PRINT
520 PRINT
530 PRINT
540 PRINT
550 PRINT
560 PRINT
570 PRINT
580 PRINT
590 PRINT
600 PRINT
610 PRINT
620 PRINT
630 PRINT
640 PRINT
650 PRINT
660 PRINT
670 PRINT
680 PRINT
690 PRINT
700 PRINT
710 PRINT
720 PRINT
730 PRINT
740 PRINT
750 PRINT
760 PRINT
770 PRINT
780 PRINT
790 PRINT
800 PRINT
810 PRINT
820 PRINT
830 PRINT
840 PRINT
850 PRINT
860 PRINT
870 PRINT
880 PRINT
890 PRINT
900 PRINT
910 PRINT
920 PRINT
930 PRINT
940 PRINT
950 PRINT
960 PRINT
970 PRINT
980 PRINT
990 PRINT
1000 PRINT

```

النتائج

الرقم	الفرقة	تكرار	الحد الأدنى	الحد الأعلى	التكرار	المتوسط	التباين	الانحراف المعياري
1	15.5	1	14	17	1	15.5	1	1
2	17.5	2	17	19	2	17.5	2	2
3	19.5	3	19	21	3	19.5	3	3
4	21.5	4	21	23	4	21.5	4	4
5	23.5	5	23	25	5	23.5	5	5
6	25.5	6	25	27	6	25.5	6	6
7	27.5	7	27	29	7	27.5	7	7
8	29.5	8	29	31	8	29.5	8	8
9	31.5	9	31	33	9	31.5	9	9
10	33.5	10	33	35	10	33.5	10	10
11	35.5	11	35	37	11	35.5	11	11
12	37.5	12	37	39	12	37.5	12	12
13	39.5	13	39	41	13	39.5	13	13
14	41.5	14	41	43	14	41.5	14	14
15	43.5	15	43	45	15	43.5	15	15
16	45.5	16	45	47	16	45.5	16	16
17	47.5	17	47	49	17	47.5	17	17
18	49.5	18	49	51	18	49.5	18	18
19	51.5	19	51	53	19	51.5	19	19
20	53.5	20	53	55	20	53.5	20	20
21	55.5	21	55	57	21	55.5	21	21
22	57.5	22	57	59	22	57.5	22	22
23	59.5	23	59	61	23	59.5	23	23
24	61.5	24	61	63	24	61.5	24	24
25	63.5	25	63	65	25	63.5	25	25
26	65.5	26	65	67	26	65.5	26	26
27	67.5	27	67	69	27	67.5	27	27
28	69.5	28	69	71	28	69.5	28	28
29	71.5	29	71	73	29	71.5	29	29
30	73.5	30	73	75	30	73.5	30	30
31	75.5	31	75	77	31	75.5	31	31
32	77.5	32	77	79	32	77.5	32	32
33	79.5	33	79	81	33	79.5	33	33
34	81.5	34	81	83	34	81.5	34	34
35	83.5	35	83	85	35	83.5	35	35
36	85.5	36	85	87	36	85.5	36	36
37	87.5	37	87	89	37	87.5	37	37
38	89.5	38	89	91	38	89.5	38	38
39	91.5	39	91	93	39	91.5	39	39
40	93.5	40	93	95	40	93.5	40	40
41	95.5	41	95	97	41	95.5	41	41
42	97.5	42	97	99	42	97.5	42	42
43	99.5	43	99	101	43	99.5	43	43
44	101.5	44	101	103	44	101.5	44	44
45	103.5	45	103	105	45	103.5	45	45
46	105.5	46	105	107	46	105.5	46	46
47	107.5	47	107	109	47	107.5	47	47
48	109.5	48	109	111	48	109.5	48	48
49	111.5	49	111	113	49	111.5	49	49
50	113.5	50	113	115	50	113.5	50	50
51	115.5	51	115	117	51	115.5	51	51
52	117.5	52	117	119	52	117.5	52	52
53	119.5	53	119	121	53	119.5	53	53
54	121.5	54	121	123	54	121.5	54	54
55	123.5	55	123	125	55	123.5	55	55
56	125.5	56	125	127	56	125.5	56	56
57	127.5	57	127	129	57	127.5	57	57
58	129.5	58	129	131	58	129.5	58	58
59	131.5	59	131	133	59	131.5	59	59
60	133.5	60	133	135	60	133.5	60	60
61	135.5	61	135	137	61	135.5	61	61
62	137.5	62	137	139	62	137.5	62	62
63	139.5	63	139	141	63	139.5	63	63
64	141.5	64	141	143	64	141.5	64	64
65	143.5	65	143	145	65	143.5	65	65
66	145.5	66	145	147	66	145.5	66	66
67	147.5	67	147	149	67	147.5	67	67
68	149.5	68	149	151	68	149.5	68	68
69	151.5	69	151	153	69	151.5	69	69
70	153.5	70	153	155	70	153.5	70	70
71	155.5	71	155	157	71	155.5	71	71
72	157.5	72	157	159	72	157.5	72	72
73	159.5	73	159	161	73	159.5	73	73
74	161.5	74	161	163	74	161.5	74	74
75	163.5	75	163	165	75	163.5	75	75
76	165.5	76	165	167	76	165.5	76	76
77	167.5	77	167	169	77	167.5	77	77
78	169.5	78	169	171	78	169.5	78	78
79	171.5	79	171	173	79	171.5	79	79
80	173.5	80	173	175	80	173.5	80	80
81	175.5	81	175	177	81	175.5	81	81
82	177.5	82	177	179	82	177.5	82	82
83	179.5	83	179	181	83	179.5	83	83
84	181.5	84	181	183	84	181.5	84	84
85	183.5	85	183	185	85	183.5	85	85
86	185.5	86	185	187	86	185.5	86	86
87	187.5	87	187	189	87	187.5	87	87
88	189.5	88	189	191	88	189.5	88	88
89	191.5	89	191	193	89	191.5	89	89
90	193.5	90	193	195	90	193.5	90	90
91	195.5	91	195	197	91	195.5	91	91
92	197.5	92	197	199	92	197.5	92	92
93	199.5	93	199	201	93	199.5	93	93
94	201.5	94	201	203	94	201.5	94	94
95	203.5	95	203	205	95	203.5	95	95
96	205.5	96	205	207	96	205.5	96	96
97	207.5	97	207	209	97	207.5	97	97
98	209.5	98	209	211	98	209.5	98	98
99	211.5	99	211	213	99	211.5	99	99
100	213.5	100	213	215	100	213.5	100	100

المخرجات

الرقم	الفرقة	تكرار	الحد الأدنى	الحد الأعلى	التكرار	المتوسط	التباين	الانحراف المعياري
1	15.5	1	14	17	1	15.5	1	1
2	17.5	2	17	19	2	17.5	2	2
3	19.5	3	19	21	3	19.5	3	3
4	21.5	4	21	23	4	21.5	4	4
5	23.5	5	23	25	5	23.5	5	5
6	25.5	6	25	27	6	25.5	6	6
7	27.5	7	27	29	7	27.5	7	7
8	29.5	8	29	31	8	29.5	8	8
9	31.5	9	31	33	9	31.5	9	9
10	33.5	10	33	35	10	33.5	10	10
11	35.5	11	35	37	11	35.5	11	11
12	37.5	12	37	39	12	37.5	12	12
13	39.5	13	39	41	13	39.5	13	13
14	41.5	14	41	43	14	41.5	14	14
15	43.5	15	43	45	15	43.5	15	15
16	45.5	16	45	47	16	45.5	16	16
17	47.5	17	47	49	17	47.5	17	17
18	49.5	18	49	51	18	49.5	18	18
19	51.5	19	51	53	19	51.5	19	19
20	53.5	20	53	55	20	53.5	20	20
21	55.5	21	55	57	21	55.5	21	21
22	57.5	22	57	59	22	57.5	22	22
23	59.5	23	59	61	23	59.5	23	23
24	61.5	24	61	63	24	61.5	24	24
25	63.5	25	63	65	25	63.5	25	25
26	65.5	26	65	67	26	65.5	26	26
27	67.5	27	67	69	27	67.5	27	27
28	69.5	28	69	71	28	69.5	28	28
29	71.5	29	71	73	29	71.5	29	29
30	73.5	30	73	75	30	73.5	30	30
31	75.5	31	75	77	31	75.5	31	31
32	77.5	32	77	79	32	77.5	32	32
33	79.5	33	79	81	33	79.5	33	33
34	81.5	34	81	83	34	81.5</		

## ٦ - الانحراف المعياري والمقارنات :

يحتاج المرء كثيراً لإجراء المقارنة بين تشنتى مجموعتين مختلفتين في وسطيهما وانحرافيهما . وربما تكونان مختلفتين حتى في وحدتى القياس ، كالأعمار والأجور - مثلاً - وربما يبدو لأول وهلة أن المجموعة ذات الانحراف المعياري الأكبر هي الأكثر تشنتاً . ولكن هب أن الوسط الحسابي للمجموعة ما كان بالكيلومترات ، وكذلك الانحراف المعياري ، فإذا تم تحويل الوسط والانحراف إلى أمتار ، ضرب كل منهما في ألف ، فأصبح الانحراف المعياري يساوى ألف مرة ، على ما كان عليه في الحالة الأولى ، فهل هذا يعنى أن تشنت هذه المجموعة قد ازداد؟

إذا فالانحراف المعياري ، وكذلك الوسط الحسابي ، يتأثران بوحداث القياس ؛ لذلك لا بد من اللجوء إلى مقياس آخر يخلو من وحدات القياس . وهذا ما توصل إليه كارل بيرسون (١٨٥٧-١٩٣٦) عندما أثبت أن نسبة الانحراف المعياري إلى الوسط الحسابي لنفس المجموعة تمثل مقياساً أفضل لمقارنة التشنت بين المجموعتين ، ولقد سمي هذا المقياس بمعامل الاختلاف (Coefficient of Variation) .

$$\text{إذا} \quad \text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100$$

أى أن :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\bar{C}}{\bar{S}} \times 100 \quad (١٢)$$

ومعامل الاختلاف نسبة مئوية تخلو خلواً تاماً من وحدات القياس ، ويمكن استخدامه لمقارنة التشنت بين أى مجموعتين ، سواء بنفس وحدة القياس أم بغيرها .

**مثال (٥ ، ٦) :**

الوسط الحسابي لمجموعة ما يساوى ١٥٠٠ ، بينما كان الانحراف المعياري لنفس المجموعة بنفس وحدة القياس يساوى ١٠٠ . أما الوسط الحسابي لمجموعة ثانية وبوحدة قياس مختلفة فيساوى ٦٠ ، وانحرافها المعياري يساوى ٥ . فأى المجموعتين أكثر تشنتاً؟

## الحل :

الانحراف المعياري للمجموعة الأولى يساوي عشرين مثلاً للانحراف المعياري الخاص بالمجموعة الثانية، إلا أن ذلك ليس دليلاً على أن المجموعة الأولى هي الأكثر تشتتاً، إذ لا بد من استخدام معامل الاختلاف.

$$\text{معامل الاختلاف للمجموعة الأولى} = \frac{100}{100} \times 100 = 100\%$$

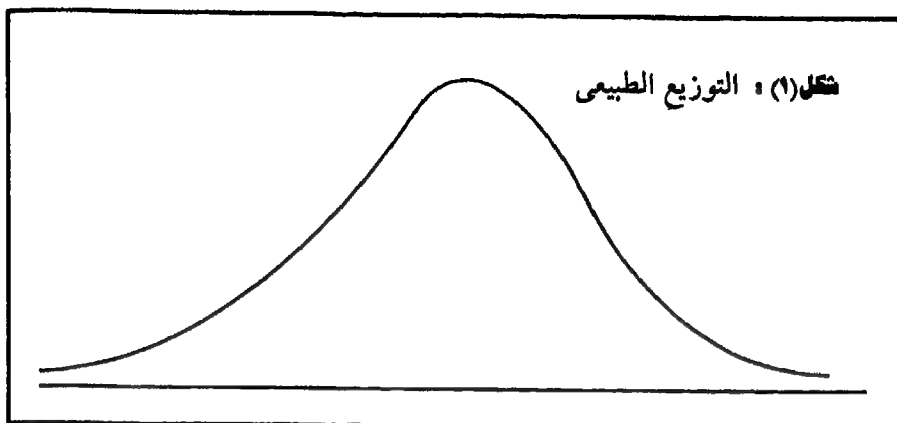
$$\text{معامل الاختلاف للمجموعة الثانية} = \frac{5}{60} \times 100 = 8.33\%$$

إذاً فالمجموعة الثانية هي الأكثر تشتتاً.

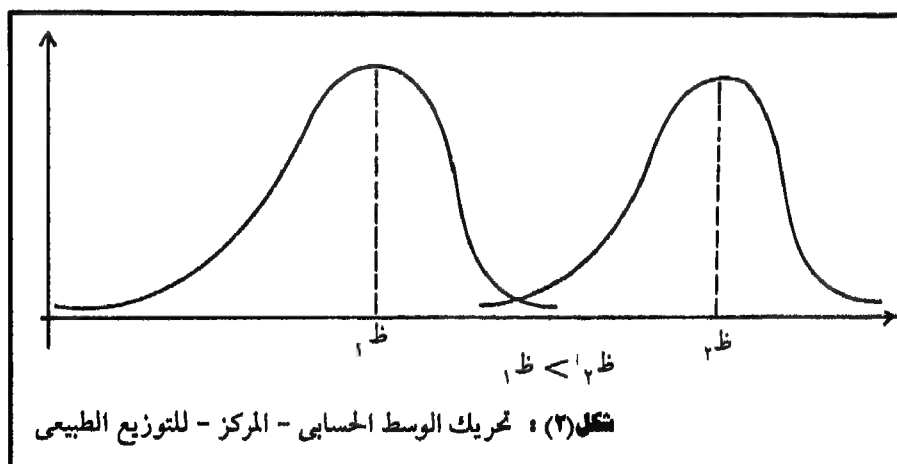
أما إذا كان الهدف هو إجراء المقارنة بين قيمتين تنتمي كل منهما إلى مجموعة مختلفة، كمقارنة درجات الطالب في مواد مختلفة، أو مقارنة درجات طالبين في مجموعتين مختلفتين لنفس المواد، سواء كانت القيم بنفس وحدة القياس أو بوحدة قياس مختلفتين، فلا بد من استخدام وحدات قياس متناظرة بين المجموعتين.

يبد أن وحدة القياس الجديدة يجب أن تخلو أيضاً من وحدات القياس، وعليه فلا بد أن تمثل النسبة بين القيم وانحرافاتهما المعيارية، إلا أن طبيعة القيم قد تكون أصلاً كبيرة في مجموعة، وصغيرة في مجموعة أخرى؛ لذلك لا بد من أخذ الوسطين الحسابيين في الاعتبار. ويسمى المقياس الناتج بعد إجراء هذه المقارنات بالقيم المعيارية (Standardized value). وتحتاج القيم المعيارية لتوفير شروط معينة قبل تطبيقها وتعريفها، ويمكن إيجاز هذه الشروط في الفقرات التالية :

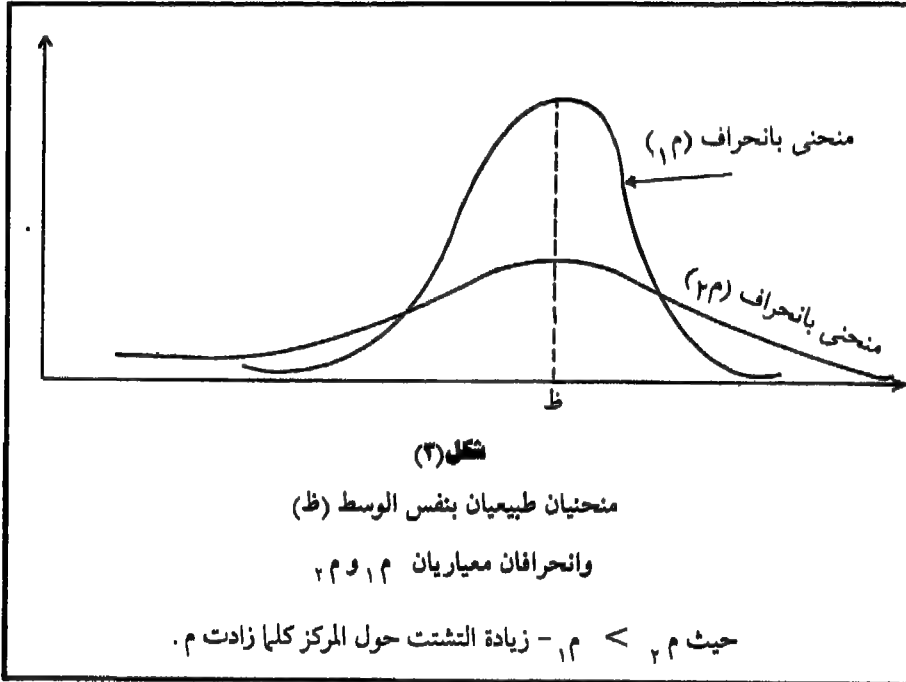
يقرب التوزيع الخاص بالبيانات من التوزيع الطبيعي كلما ازداد حجم العينة (ن) إلى أن يصبح توزيعاً طبيعياً، عندما يكون حجم العينة كبيراً. والتوزيع الطبيعي هو توزيع متماثل، يتساوى فيه الوسط والوسيط والمنوال، وهو أشبه بالناقوس المقلوب مثلما هو مبين في الشكل التالي.



وبما أن منحنى التوزيع الطبيعي هو أحد المنحنيات الاحتمالية المتصلة، بل هو أشهرها، فإن المساحة الواقعة تحته تساوى واحداً. هذا ويمتد منحنى التوزيع الطبيعي من  $-\infty$  إلى  $+\infty$  ويتميز بطرفين رقيقين للغاية يوشكان ملامسة المحور الأفقى .  
إذا كانت  $z$  هي الوسط الحسابى للمجتمع الذى سحبت منه العينة، وإذا كانت  $m$  هي الانحراف المعياري لبيانات المجتمع، فهذا يعنى أن  $z$  و  $m$  هما مقدران لقيمتي  $z$  و  $m$ . أما  $z$  و  $m$  فتسميان مَعْلَمَتَي التوزيع الطبيعي إذا كان التوزيع طبيعياً حقاً، وعندها يكون التوزيع متماثلاً حول الخط العمودى الساقط على  $z$ ، فإذا تحركت  $z$  إلى اليمين أو اليسار انتقل معها التوزيع؛ لأنها تمثل المركز بالنسبة له.

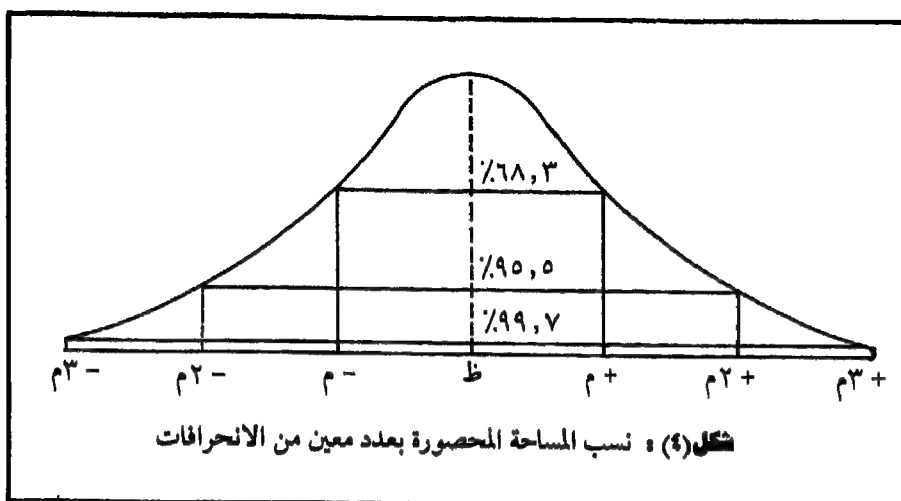


أما المعلم الثاني (م) فهو مقياس التشتت؛ لذلك فهي التي تحدد شكل المنحنى بعد أن يكون موقعه قد حدد بواسطة (ظ). إذ كلما قلت م زاد ارتفاع المنحنى وقل تشتته، والعكس صحيح.



يمكن تقسيم المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي بعدد الانحرافات الواقعة إلى يمين أو يسار الوسط، إذ أن :

- (أ) ٦٨,٣٪ من المساحة تنحصر في الفترة  $ظ + م$  و  $ظ - م$ .
- (ب) ٨٦,٦٪ من المساحة تنحصر في الفترة  $ظ + ١ \frac{١}{٢} م$  و  $ظ - ١ \frac{١}{٢} م$ .
- (ج) ٩٥,٥٪ من المساحة تنحصر في الفترة  $ظ + ٢ م$  و  $ظ - ٢ م$ .
- (د) ٩٩,٧٪ من المساحة تنحصر في الفترة  $ظ + ٣ م$  و  $ظ - ٣ م$ .



أما التوزيع الناتج من توزيعين طبيعيين أو أكثر، فهو توزيع طبيعي أيضاً، فالتوزيع المشترك لمجموع مجتمعين مستقلين عدد عناصر كل منهما يساوى (ن)، هو توزيع طبيعي بوسط حسابى يساوى مجموع الوسطين وتباين يساوى مجموع التباينين أيضاً. أما التوزيع المشترك للفرق بين التوزيعين فهو أيضاً طبيعي بوسط حسابى يساوى الفرق بين الوسطين وتباين يساوى مجموعيهما. هذا وتجدد الإشارة هنا إلى أن التباين يجمع ولا يطرح؛ لأن تشتت التوزيع المشترك يجمع بين التشتتين في الحالتين معاً.

وأما إذا كانت س هي متغير عشوائى تتبع توزيعاً طبيعياً، وإذا كانت ي هي متغير جديد يمكن التعبير عنه بالمعادلة :

$$ي = \frac{س - ظ}{م} \quad (١٣)$$

فالتوزيع الخاص بالمتغير ي هو توزيع طبيعي أيضاً بوسط حسابى يساوى صفراً، وانحراف معيارى واحد. ويسمى هذا التوزيع بالتوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distrib.)

إذاً فللكل قيمة من س ما يناظرها في ى . فالقيمة س ر التى تنتمى لعينة ذات توزيع طبيعى  
بوسط حسابى (س) وانحراف معيارى (ع) يمكن التعبير عنها بالقيمة المعيارية :

$$ى = \frac{س - س}{ع} \quad (١٤)$$

والقيمة المعيارية هى التى تستخدم للمقارنة بين القيم التى تتبع لمجتمعات مختلفة على  
أساس عدد الوحدات المعيارية الناتجة بعد التحويل ، والتى توضح الترتيب الخاص بكل متغير  
في مجتمعه اعتماداً على الشكل (٤) .

**مثال (٥,٧) :**

حصل أحد الطلاب على ٨١ درجة في أحد الامتحانات التى كان الوسط العام فيها لجميع  
الطلاب الممتحنين ٧٠ درجة بانحراف معيارى قدره ١٠ ، بينما حصل طالب آخر في مؤسسة  
تعليمية أخرى على ٩٠ درجة في نفس المادة ، وكان الوسط الحسابى والانحراف المعيارى  
للممتحنين في المدرسة الثانية هما ٧٥ و ١٦ على التوالى . فأى الطالبين أفضل ، مقارنة  
بالمجموعة التى يدرس معها ؟

**الحل :**

$$ى١ = \frac{٨١ - ٧٠}{١٠}$$

$$= ١,١ \quad \text{انحراف معيارى}$$

$$ى٢ = \frac{٩٠ - ٧٥}{١٦}$$

$$= ٠,٩٤ \quad \text{انحراف معيارى}$$

إذاً فمستوى الطالب الأول هو الأفضل ؛ لأنه يبعد عن الوسط بـ ١,١ انحراف معيارى ،  
بينما يزيد الثانى على الوسط بمقدار ٠,٩٤ انحراف معيارى .

البرنامج التالى يقوم بحساب القيمة المعيارية لأى رقم من مجموعة أرقام باستخدام المعادلة :

$$Y = \frac{X - M}{R}$$

حيث :

Y = القيمة المعيارية

X = المتغير

M = الوسط الحسابى

R = الانحراف المعيارى

```

10 REM برنامج لحساب القيمة المعيارية لمجموعة مفردات
20 DIM X(17)
30 S=0
40 READ N REM عدد القيم
50 PRINT USING 330
60 PRINT USING 340
70 FOR I=1 TO N
80 READ X(I)
90 PRINT USING 350,X(I)
100 S=S+X(I)
110 NEXT I
120 PRINT USING 360
130 PRINT USING 370,s
140 M=S/N
150 PRINT
160 FOR I=1 TO N
170 D=X(I)-M
180 T=T+D**2
190 NEXT I
200 PRINT
210 PRINT
220 V=T/(N-1)
230 R=SQR(V)
240 PRINT ,M;'الوسط الحسابى'
250 PRINT ,R;'الانحراف المعيارى'
260 PRINT
270 Y=(X(5)-M)/R
280 PRINT USING 380,Y,X(5)
290 PRINT
300 PRINT
310 PRINT
320 :
330 :
340 :
350 :
360 :
370 :
380 :
390 DATA 17,16,22,21,20,23,21,19,15,13,23,17,20,29,18,22,16,25
400 END

```

القيم  
 ##  
 المجموع  
 ##  
 القيم المعيارية للرقم ## هي ## ##  
 DATA 17,16,22,21,20,23,21,19,15,13,23,17,20,29,18,22,16,25



المخرجات
القيم
16
22
21
20
23
21
19
15
13
23
17
20
20
18
22
16
25
340
المجموع

الوسط الحسابي = 20  
الانحراف المعياري = 3.984344  
القيمة المعيارية للرقم 23 هي 0.753

## ٧ = العزوم (Moments)

إذا كانت س<sub>١</sub>، س<sub>٢</sub>، س<sub>٣</sub>، . . . . . س<sub>ن</sub>، قيماً عينية، فالعزم (ل) للدرجة (و) حول النقطة (أ) هو الإحصائية :

$$(١٥) \quad ل \quad و = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} (س_j - أ)^j$$

فالعزم من الدرجة (و) حول نقطة الأصل (أ = صفراً) هو :

$$(١٦) \quad ل \quad و = \sum_{j=1}^n س_j^j$$

أما العزم من الدرجة (و) حول الوسط الحسابي (أ = هن) فهو :

$$(١٧) \quad ل \quad و = \sum_{j=1}^n (س_j - س_n)^j$$

أما في حالة التوزيعات التكرارية فترفع الانحرافات إلى درجة العزم، ثم تضرب في التكرار، كما هو الحال في الوسط الحسابي والتباين. إذا فالعزم حول نقطة الأصل لبيانات مبوبة هو :

$$(١٨) \quad \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} s_r^2 = L$$

والعزم حول الوسط الحسابي للبيانات المبوبة أيضاً هو :

$$(١٩) \quad \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} (s_r - \bar{s})^2 = L$$

يكون العزم من الدرجة صفر إذا كانت و = صفراً ومن الدرجة الأولى إذا كانت و = ١ ومن الثانية إذا كانت و = ٢ وهكذا. كذلك يؤخذ العزم في أكثر الحالات حول الوسط الحسابي. لذلك يجب أن تحدد أى نقطة أخرى اعتبرت مركزاً للعزم بخلاف الوسط الحسابي. يلاحظ أن العزم من الدرجة صفر حول أى نقطة يساوى واحداً؛ ذلك لأن :

$$(٢٠) \quad \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} (s_r - \bar{s})^0 = L$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} = L$$

$$\frac{n}{n} =$$

$$\therefore L = ١$$

أما العزم الأول حول نقطة الأصل فيساوى الوسط، بينما يمثل العزم الثانى حول نقطة الأصل أيضاً متوسط مجموع مربعات المتغيرات، ذلك لأن :

$$L = \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} s_r$$

$$= \bar{s}$$

$$\sum_{r=1}^L \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

وبذلك يكون التباين هو :

$$(21) \quad \frac{n}{1-n} = \frac{1}{n} \quad (L-1)$$

أما العزم الأول (حول الوسط الحسابي) فيساوى صفراً، والعزم الثاني هو متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي . أى أن :

$$(22) \quad \sum_{r=1}^L \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad (S_r - \bar{S})$$

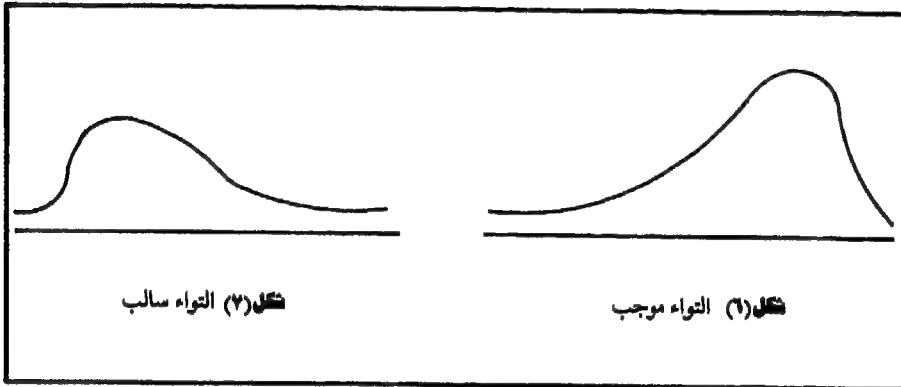
= صفراً

$$(23) \quad \sum_{r=1}^L \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad (S_r - \bar{S})^2$$

لذلك يعتبر العزم الثاني هو التباين ؛ وذلك لضالة الفرق بين قيمة  $n$  وقيمة  $(n - 1)$  ، خاصة عندما يكون حجم العينة كبيراً .  
وتجدر الإشارة هنا إلى أن كلمة العزم قد وفدت إلى الإحصاء من مجال الفيزياء ، فالعزم في الفيزياء هو ناتج ضرب القوة العمودية في طول الذراع ، فالقوة العمودية هنا هى التكرار، أما طول الذراع فهو المسافة بين نقطة المركز  $(\bar{S})$  والنقطة المعنية  $(S_r)$  .  
اتضح مما مضى أن العزمين الأول والثاني حول نقطتي الأصل والوسط الحسابي يستخدمان لاستخراج الوسط الحسابي والتباين ، وللتحقق من أن مجموع الانحرافات حول الوسط الحسابي يساوى صفراً . أما العزم الثالث والعزم الرابع حول الوسط الحسابي فيستخدمان لاستخراج معاملي الالتواء والتفرطح التالى ذكرهما على التوالى . هذا وتجدر الإشارة هنا إلى أن العزم الفردية - ١، ٣، ٥، ٧ - تساوى صفراً في حالة التوزيع الطبيعي المتماثل ، وتقرب من الصفر كلما اقترب توزيع البيانات من التماثل ، أما العزوم الزوجية فهى دائماً موجبة ولا تساوى صفراً ، إلا إذا كانت جميع القيم متساوية .

## ٨ - الالتواء (Skewness)

ورد في مقارنة الوسط الحسابى ، والوسيط ، والمنوال أن الوسيط يكون دائماً بين الوسط والمنوال . فإذا كانت هناك قيم كبيرة لدرجة التطرف فالوسط الحسابى هو الأكبر؛ لأن التوزيع يكون ملتوياً في اتجاه البيانات الكبرى - ناحية اليمين . أما إذا كانت هناك قيم صغيرة جداً ، فيكون الوسط الحسابى هو الأصغر ، ويكون الالتواء للجهة اليسرى . فيقال إن هناك التواء موجباً في الحالة الأولى والتواء سالباً في الحالة الثانية .



إذا فالالتواء هو عدم تماثل التوزيع بالنسبة لأى خط عمودى ، لذلك يتم قياس الالتواء لتحديد ما إذا كان هناك التواء موجب أو سالب ودرجة الالتواء لتوضيح شكل منحنى توزيع البيانات ، يستخدم في ذلك العزم الثالث .

فإذا تساوى مجموع مكعبات الانحرافات الخاصة بالقيم التى تقل عن الوسط الحسابى بمجموع مكعبات انحرافات القيم التى تزيد على الوسط الحسابى ، يكون العزم الثالث صفراً . إذا فمعامل الالتواء للتوزيع المتماثل يساوى صفراً ، طالما أنه يعتمد على العزم الثالث :

$$L_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n} \quad (24)$$

يكون العزم الثالث موجباً إذا كان الالتواء للجهة اليمنى ، وسالباً إذا كان الالتواء للجهة اليسرى ، ويتعد عن الصفر كلما كان الالتواء شديداً . ذلك لأن مجموع المكعبات الموجبة يكون أكثر من مجموع المكعبات السالبة في حالة الالتواء الموجب ، والعكس صحيح في حالة الالتواء السالب .

بيد أن العزم الثالث يتأثر كثيراً بوحدة القياس أو مقياس الرسم ؛ لذلك لا يمكن استخدامه للمقارنة بين التواءين . ولقد استخدمت القيمة المعيارية للتواء وسميت بمعامل الالتواء (Coefficient of Skewness) للتخلص من وحدات القياس ؛ لهذا فقد عرف معامل الالتواء بأنه :

$$(٢٥) \quad \frac{{}_3J}{{}_3E} = \sqrt[3]{T}$$

ويلاحظ أن المقام هو مكعب الانحراف المعياري حتى يخلو معامل الالتواء خلواً تاماً من وحدات القياس أو مقياس الرسم . كذلك يمكن تعريف معامل الالتواء بأنه :

$$(٢٦) \quad \frac{{}_2({}_3J)}{{}_2({}_3E)} = T$$

وبما أن  $\sqrt[3]{T} = E$  فإن :

$$(٢٧) \quad {}_3J = {}^2({}_3E)$$

وبذلك تكون :

$$(٢٨) \quad \frac{{}_3J}{{}_3J} = T$$

$$\frac{\text{مربع العزم الثالث}}{\text{مكعب العزم الثاني}} =$$

كما أن :

$$(٢٩) \quad \frac{{}_3J}{\sqrt[3]{T} \cdot {}_2J} = \sqrt[3]{T}$$

مثال (٥, ٨) :  
أوجد معامل الالتواء للتوزيع التالي :

الفئات	ك ر	س ر	س ر ك ر	س ر - س ر	<sup>٢</sup> (س ر - س ر)	<sup>٢</sup> (س ر - س ر) ك ر	<sup>٣</sup> (س ر - س ر) ك ر
٧-٣	١	٥	٥	١٢, ٢٤-	١٤٩, ٨١٧٦	١٤٩, ٨١٧٦	١٨٣٣, ٧٦٧٤-
١١-٧	٣	٩	٢٧	٨, ٢٤-	٦٧, ٨٩٧٦	٢٠٣, ٦٩٢٨	١٦٧٨, ٤٢٨٦-
١٥-١١	١١	١٣	١٤٣	٤, ٢٤-	١٧, ٩٧٧٦	١٩٧, ٧٥٣٦	٨٣٨, ٤٧٥٢٦-
١٩-١٥	٢٠	١٧	٣٤٠	٠, ٤-	٠, ٠٥٧٦	١, ١٥٢	٠, ٢٧٦٤٨-
٢٣-١٩	٩	٢١	١٨٩	٣, ٧٦	١٤, ١٣٧٦	١٢٧, ٢٣٨٤	٤٧٨, ٤١٦٣٨
٢٧-٢٣	٤	٢٥	١٠٠	٧, ٧٦	٦٠, ٢١٧٦	٢٤٠, ٨٧٠٤	١٨٦٩, ١٥٤٢
٣١-٢٧	٢	٢٩	٥٨	١١, ٧٦	١٣٨, ٢٩٧٦	٢٧٦, ٥٩٥٢	٣٢٥٢, ٧٥٩٦
المجموع	٥٠		٨٦٢		٤٤٨, ٤٠٣٢	١١٩٧, ١٢٠	١٢٤٩, ٣٨٢٤

$$\text{س ر} = ١٧, ٢٤$$

$$\frac{\sum (\text{س ر} - \text{س ر})^2 \text{ ك ر}}{ن} = \text{ل}^٢$$

$$\frac{١١٩٧, ١٢٠}{٥٠} =$$

$$٢٣, ٩٤٢ =$$

$$\frac{\sum (\text{س ر} - \text{س ر})^3 \text{ ك ر}}{ن} = \text{ل}^٣$$

$$\frac{١٢٤٩, ٣٨٢٤}{٥٠} =$$

$$24,988 = \text{٣ ل} \quad \therefore$$

$$\frac{\text{٣ ل}}{\text{٢ ل} \sqrt{\text{٢ ل}}} = \sqrt{\text{١ ت}}$$

$$\frac{24,988}{23,942 \sqrt{23,942}} =$$

$$0,213 = \sqrt{\text{١ ت}} \quad \therefore$$

$$0,1455 = \text{١ ت}$$

البرنامج التالى يحسب معامل الالتواء والذي سبق الحديث عنه مستخدماً فى ذلك التوزيع التكرارى الوارد بالمثال (٨) السابق باستخدام المعادلة :

$$W = Q^2$$

حيث :

$$Q = \frac{L_3}{L_2 \sqrt{L_2}}$$

$$L_3 = \text{العزم الثالث}$$

$$L_2 = \text{العزم الثانى}$$

```

100 REM برنامج لحساب الالتواء
101 DIM A(7),B(7),C(7),D(7),E(7),F(7),G(7),H(7),K(7),L(7)
102 F=0
103 R=0
104 S=0
105 T=0
106 D1=0
107 READ N REM عدد المشاهدات
108 FOR I=1 TO N
109   READ A(I),B(I),F(I) REM الحد الأدنى, الحد الأعلى, التكرار
110   T=T+F(I)
111   U(I)=(A(I)+B(I))/2
112   D1=D1+F(I)
113 NEXT I
114 M=D1/T
115 FOR I=1 TO N
116   C(I)=C(I)-M**2
117   E(I)=E(I)+2*M**2
118   G(I)=G(I)+3*M**2
119   F(I)=F(I)+M**2
120   V=V+M**2
121   R=R+M**2
122   S=S+U(I)**2
123   U=U+G(I)
124 NEXT I
125 PRINT USING 305
126 PRINT USING 300
127 PRINT USING 305
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000
1001
1002
1003
1004
1005
1006
1007
1008
1009
1010
1011
1012
1013
1014
1015
1016
1017
1018
1019
1020
1021
1022
1023
1024
1025
1026
1027
1028
1029
1030
1031
1032
1033
1034
1035
1036
1037
1038
1039
1040
1041
1042
1043
1044
1045
1046
1047
1048
1049
1050
1051
1052
1053
1054
1055
1056
1057
1058
1059
1060
1061
1062
1063
1064
1065
1066
1067
1068
1069
1070
1071
1072
1073
1074
1075
1076
1077
1078
1079
1080
1081
1082
1083
1084
1085
1086
1087
1088
1089
1090
1091
1092
1093
1094
1095
1096
1097
1098
1099
1100
1101
1102
1103
1104
1105
1106
1107
1108
1109
1110
1111
1112
1113
1114
1115
1116
1117
1118
1119
1120
1121
1122
1123
1124
1125
1126
1127
1128
1129
1130
1131
1132
1133
1134
1135
1136
1137
1138
1139
1140
1141
1142
1143
1144
1145
1146
1147
1148
1149
1150
1151
1152
1153
1154
1155
1156
1157
1158
1159
1160
1161
1162
1163
1164
1165
1166
1167
1168
1169
1170
1171
1172
1173
1174
1175
1176
1177
1178
1179
1180
1181
1182
1183
1184
1185
1186
1187
1188
1189
1190
1191
1192
1193
1194
1195
1196
1197
1198
1199
1200
1201
1202
1203
1204
1205
1206
1207
1208
1209
1210
1211
1212
1213
1214
1215
1216
1217
1218
1219
1220
1221
1222
1223
1224
1225
1226
1227
1228
1229
1230
1231
1232
1233
1234
1235
1236
1237
1238
1239
1240
1241
1242
1243
1244
1245
1246
1247
1248
1249
1250
1251
1252
1253
1254
1255
1256
1257
1258
1259
1260
1261
1262
1263
1264
1265
1266
1267
1268
1269
1270
1271
1272
1273
1274
1275
1276
1277
1278
1279
1280
1281
1282
1283
1284
1285
1286
1287
1288
1289
1290
1291
1292
1293
1294
1295
1296
1297
1298
1299
1300
1301
1302
1303
1304
1305
1306
1307
1308
1309
1310
1311
1312
1313
1314
1315
1316
1317
1318
1319
1320
1321
1322
1323
1324
1325
1326
1327
1328
1329
1330
1331
1332
1333
1334
1335
1336
1337
1338
1339
1340
1341
1342
1343
1344
1345
1346
1347
1348
1349
1350
1351
1352
1353
1354
1355
1356
1357
1358
1359
1360
1361
1362
1363
1364
1365
1366
1367
1368
1369
1370
1371
1372
1373
1374
1375
1376
1377
1378
1379
1380
1381
1382
1383
1384
1385
1386
1387
1388
1389
1390
1391
1392
1393
1394
1395
1396
1397
1398
1399
1400
1401
1402
1403
1404
1405
1406
1407
1408
1409
1410
1411
1412
1413
1414
1415
1416
1417
1418
1419
1420
1421
1422
1423
1424
1425
1426
1427
1428
1429
1430
1431
1432
1433
1434
1435
1436
1437
1438
1439
1440
1441
1442
1443
1444
1445
1446
1447
1448
1449
1450
1451
1452
1453
1454
1455
1456
1457
1458
1459
1460
1461
1462
1463
1464
1465
1466
1467
1468
1469
1470
1471
1472
1473
1474
1475
1476
1477
1478
1479
1480
1481
1482
1483
1484
1485
1486
1487
1488
1489
1490
1491
1492
1493
1494
1495
1496
1497
1498
1499
1500
1501
1502
1503
1504
1505
1506
1507
1508
1509
1510
1511
1512
1513
1514
1515
1516
1517
1518
1519
1520
1521
1522
1523
1524
1525
1526
1527
1528
1529
1530
1531
1532
1533
1534
1535
1536
1537
1538
1539
1540
1541
1542
1543
1544
1545
1546
1547
1548
1549
1550
1551
1552
1553
1554
1555
1556
1557
1558
1559
1560
1561
1562
1563
1564
1565
1566
1567
1568
1569
1570
1571
1572
1573
1574
1575
1576
1577
1578
1579
1580
1581
1582
1583
1584
1585
1586
1587
1588
1589
1590
1591
1592
1593
1594
1595
1596
1597
1598
1599
1600
1601
1602
1603
1604
1605
1606
1607
1608
1609
1610
1611
1612
1613
1614
1615
1616
1617
1618
1619
1620
1621
1622
1623
1624
1625
1626
1627
1628
1629
1630
1631
1632
1633
1634
1635
1636
1637
1638
1639
1640
1641
1642
1643
1644
1645
1646
1647
1648
1649
1650
1651
1652
1653
1654
1655
1656
1657
1658
1659
1660
1661
1662
1663
1664
1665
1666
1667
1668
1669
1670
1671
1672
1673
1674
1675
1676
1677
1678
1679
1680
1681
1682
1683
1684
1685
1686
1687
1688
1689
1690
1691
1692
1693
1694
1695
1696
1697
1698
1699
1700
1701
1702
1703
1704
1705
1706
1707
1708
1709
1710
1711
1712
1713
1714
1715
1716
1717
1718
1719
1720
1721
1722
1723
1724
1725
1726
1727
1728
1729
1730
1731
1732
1733
1734
1735
1736
1737
1738
1739
1740
1741
1742
1743
1744
1745
1746
1747
1748
1749
1750
1751
1752
1753
1754
1755
1756
1757
1758
1759
1760
1761
1762
1763
1764
1765
1766
1767
1768
1769
1770
1771
1772
1773
1774
1775
1776
1777
1778
1779
1780
1781
1782
1783
1784
1785
1786
1787
1788
1789
1790
1791
1792
1793
1794
1795
1796
1797
1798
1799
1800
1801
1802
1803
1804
1805
1806
1807
1808
1809
1810
1811
1812
1813
1814
1815
1816
1817
1818
1819
1820
1821
1822
1823
1824
1825
1826
1827
1828
1829
1830
1831
1832
1833
1834
1835
1836
1837
1838
1839
1840
1841
1842
1843
1844
1845
1846
1847
1848
1849
1850
1851
1852
1853
1854
1855
1856
1857
1858
1859
1860
1861
1862
1863
1864
1865
1866
1867
1868
1869
1870
1871
1872
1873
1874
1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900
1901
1902
1903
1904
1905
1906
1907
1908
1909
1910
1911
1912
1913
1914
1915
1916
1917
1918
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1925
1926
1927
1928
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1935
1936
1937
1938
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1945
1946
1947
1948
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958
1959
1960
1961
1962
1963
1964
1965
1966
1967
1968
1969
1970
1971
1972
1973
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2025
2026
2027
2028
2029
2030
2031
2032
2033
2034
2035
2036
2037
2038
2039
2040
2041
2042
2043
2044
2045
2046
2047
2048
2049
2050
2051
2052
2053
2054
2055
2056
2057
2058
2059
2060
2061
2062
2063
2064
2065
2066
2067
2068
2069
2070
2071
2072
2073
2074
2075
2076
2077
2078
2079
2080
2081
2082
2083
2084
2085
2086
2087
2088
2089
2090
2091
2092
2093
2094
2095
2096
2097
2098
2099
2100
2101
2102
2103
2104
2105
2106
2107
2108
2109
2110
2111
2112
2113
2114
2115
2116
2117
2118
2119
2120
2121
2122
2123
2124
2125
2126
2127
2128
2129
2130
2131
2132
2133
2134
2135
2136
2137
2138
2139
2140
2141
2142
2143
2144
2145
2146
2147
2148
2149
2150
2151
2152
2153
2154
2155
2156
2157
2158
2159
2160
2161
2162
2163
2164
2165
2166
2167
2168
2169
2170
2171
2172
2173
2174
2175
2176
2177
2178
2179
2180
2181
2182
2183
2184
2185
2186
2187
2188
2189
2190
2191
2192
2193
2194
2195
2196
2197
2198
2199
2200
2201
2202
2203
2204
2205
2206
2207
2208
2209
2210
2211
2212
2213
2214
2215
2216
2217
2218
2219
2220
2221
2222
2223
2224
2225
2226
2227
2228
2229
2230
2231
2232
2233
2234
2235
2236
2237
2238
2239
2240
2241
2242
2243
2244
2245
2246
2247
2248
2249
2250
2251
2252
2253
2254
2255
2256
2257
2258
2259
2260
2261
2262
2263
2264
2265
2266
2267
2268
2269
2270
2271
2272
2273
2274
2275
2276
2277
2278
2279
2280
2281
2282
2283
2284
2285
2286
2287
2288
2289
2290
2291
2292
2293
2294
2295
2296
2297
2298
2299
2300
2301
2302
2303
2304
2305
2306
2307
2308
2309
2310
2311
2312
2313
2314
2315
2316
2317
2318
2319
2320
2321
2322
2323
2324
2325
2326
2327
2328
2329
2330
2331
2332
2333
2334
2335
2336
2337
2338
2339
2340
2341
2342
2343
2344
2345
2346
2347
2348
2349
2350
2351
2352
2353
2354
2355
2356
2357
2358
2359
2360
2361
2362
2363
2364
2365
2366
2367
2368
2369
2370
2371
2372
2373
2374
2375
2376
2377
2378
2379
2380
2381
2382
2383
2384
2385
2386
2387
2388
2389
2390
2391
2392
2393
2394
2395
2396
2397
2398
2399
2400
2401
2402
2403
2404
2405
2406
2407
2408
2409
2410
2411
2412
2413
2414
2415
2416
2417
2418
2419
2420
2421
2422
2423
2424
2425
2426
2427
2428
2429
2430
2431
2432
2433
2434
2435
2436
2437
2438
2439
2440
2441
2442
2443
2444
2445
2446
2447
2448
2449
2450
2451
2452
2453
2454
2455
2456
2457
2458
2459
2460
2461
2462
2463
2464
2465
2466
2467
2468
2469
2470
2471
2472
2473
2474
2475
2476
2477
2478
2479
2480
2481
2482
2483
2484
2485
2486
2487
2488
2489
2490
2491
2492
2493
2494
2495
2496
2497
2498
2499
2500
2501
2502
2503
2504
2505
2506
2507
2508
2509
2510
2511
2512
2513
2514
2515
2516
2517
2518
2519
2520
2521
2522
2523
2524
2525
2526
2527
2528
2529
2530
2531
2532
2533
2534
2535
2536
2537
2538
2539
2540
2541
2542
2543
2544
2545
2546
2547
2548
2549
2550
2551
2552
2553
2554
2555
2556
2557
2558
2559
2560
2561
2562
2563
2564
2565
2566
2567
2568
2569
2570
2571
2572
2573
2574
2575
2576
2577
2578
2579
2580
2581
2582
2583
2584
2585
2586
2587
2588
2589
2590
2591
2592
2593
2594
2595
2596
2597
2598
2599
2600
2601
2602
2603
2604
2605
2606
2607
2608
2609
2610
2611
2612
2613
2614
2615
2616
2617
2618
2619
2620
2621
2622
2623
2624
2625
2626
2627
2628
2629
2630
2631
2632
2633
2634
2635
2636
2637
2638
2639
2640
2641
2642
2643
2644
2645
2646
2647
2648
2649
2650
2651
2652
2653
2654
2655
2656
2657
2658
2659
2660
2661
2662
2663
2664
2665
2666
2667
2668
2669
2670
2671
2672
2673
2674
2675
2676
2677
2678
2679
2680
2681
2682
2683
2684
2685
2686
2687
2688
2689
2690
2691
2692
2693
2694
2695
2
```



لتحديد ما إذا كان التوزيع ملتوياً بدرجة كبيرة (جوهرية) أم لا ، يمكن مقارنة قيمة  $\bar{A}$  بالجدول (م) الملحق بنهاية الفصل . فإذا كانت القيمة الموجبة تزيد على القيمة المناظرة لها بالجدول تحت العمود الخاص بنسبة ٥٪ ، أو كانت القيمة المحسوبة سالبة وأقل من القيمة المبينة في الملحق ، فالالتواء بدرجة كبيرة . ويلاحظ هنا أن قيمة  $\bar{A}$  هنا موجبة ، ولكنها أقل من القيمة المناظرة لها في الجدول ، والتي تساوى ٠,٥٣٤ ، وعليه يكون الالتواء ظاهرياً ، أى أن توزيع البيانات لا يختلف كثيراً عن التوزيع الطبيعي .

أما في حالة التوزيعات ذات الفئات المفتوحة فيمكن استخدام الربعات والمدى الربيعي لتقدير الالتواء . فالفرق بين الوسيط والربع الأعلى يساوى الفرق بين الوسيط والربع الأدنى في حالة التماثل ، أى أن :

$$\%٧٥ - \%٢٥ = \%٥٠ - \%٢٥ \quad \text{في حالة التماثل}$$

وأما إذا كان الالتواء سالباً فيكون الوسيط أقرب للربع الأعلى ، والعكس صحيح . لذلك يعرف معامل الالتواء في هذه الحالة بأنه :

$$\begin{aligned} \text{ت} = \frac{(\%٥٠ - \%٧٥) - (\%٢٥ - \%٥٠)}{\%٢٥ - \%٧٥} &= \frac{(\%٥٠ - \%٧٥) + \%٢٥ - \%٥٠}{\%٢٥ - \%٧٥} \\ &= \frac{\%٢٥ - \%٧٥}{\%٢٥ - \%٧٥} \end{aligned} \quad (٣٠)$$

يستخدم البعض نسبة الفرق بين الوسيط الحسابي والوسيط أو المنوال إلى الانحراف المعياري ، كمقياس لمعامل الالتواء ، إلا أن هذه الطريقة ليست دقيقة ؛ لأن الانحراف المعياري مرتبط بالوسيط الحسابي أكثر من ارتباطه ببقية مقاييس النزعة المركزية ، كما أن المنوال مقياس غير دقيق في حد ذاته .

مثال (٩، ٥) :

استخدم البيانات التالية لتقدير الالتواء بطريقة الربيعات :

الفئات	ك ر	تجمع تكرارى صاعد
٣-٧	١	١
٧-١١	٣	٤
١١-١٥	١١	١٥
١٥-١٩	٢٠	٣٥
١٩-٢٣	٩	٤٤
٢٣-٢٧	٤	٤٨
٢٧-٣١	٢	٥٠
المجموع	٥٠	

$$\%ج = ح + \frac{\left( \frac{رن}{١٠٠} - ن \right)}{ك} ط$$

$$\%ج٥٠ = ١٥ + \frac{٤ \times (١٥ - ٢٥)}{٢٠}$$

$$= ١٧$$

$$\%ج٢٥ = ١١ + \frac{٤ \times (٤ - ١٢,٥)}{١١}$$

$$= ١٤,٠٩$$

$$\%ج٧٥ = ١٩ + \frac{٤ \times (٣٥ - ٣٧,٥)}{٩}$$

$$= ٢٠,١١$$

$$\frac{14,09 + 17 \times 2 - 20,11}{14,09 - 20,11} = 1, \text{ ت}$$

$$\therefore 1, \text{ ت} = 0,033$$

البرنامج التالى يقوم بحساب الآتى :

- الربيع الأعلى .
- الربيع الأدنى .
- الوسيط .
- الانحراف الربيعى .
- معامل الالتواء .

وهو هنا يقوم بحساب معامل الالتواء باستخدام طريقة الربيعات التى سبق شرحها فى هذا الفصل باستخدام المعادلة :

$$Q = \frac{(Q_1 - 2Q_2 + Q_3)}{Q_1 - Q_3}$$

حيث :

- Q = معامل الالتواء
- Q<sub>1</sub> = الربيع الأعلى
- Q<sub>2</sub> = الوسيط
- Q<sub>3</sub> = الربيع الأدنى

```

10 REM برنامج لحساب الالتواء بطريقة الربيعات
20 DIM A(7),B(7),C(7),D(7),E(7),F(7),G(7)
30 T=0
40 READ N
50 FOR I=1 TO N
60 READ A(I),B(I),F(I) REM الحد الاعلى، الحد الادنى والتكرار
70 T=T+F(I) REM مجموع التكرار
80 NEXT I
90 C(1)=F(1)
100 FOR I=2 TO N
110 C(I)=C(I-1)+F(I)
120 NEXT I
130
140
150
160
170
180
190 PRINT USING 130
195 PRINT USING 130
200 PRINT USING 140
210 PRINT USING 150
220 PRINT
230 FOR I=1 TO N
240 PRINT USING 160, C(I),F(I),B(I),A(I),I
250 NEXT I
260 PRINT USING 170
270 PRINT USING 180 ,T
280 PRINT
290 S1=T*3/4
300 S2=T/2
310 S3=T/4
320 FOR I=1 TO N
330 IF C(I)>S1 THEN 340
340 J=I
350 NEXT I
360 FOR I=1 TO N
370 IF C(I)>S2 THEN 348
380 K=I
390 NEXT I
400 FOR I=1 TO N
410 IF C(I)>S3 THEN 380
420 V=I
430 NEXT I
440 PRINT
450 GOSUB 610
460 Q1=FNA(L1,S1,O1,F1,W1)
470 PRINT ,Q1; ' = الربيع الاعلى '
480 PRINT
490 GOSUB 651
500 Q2=FNA(L2,S2,O2,F2,W2)
510 PRINT ,Q2; ' = الوسيط '
520 PRINT
530 GOSUB 660
540 Q3=FNA(L3,S3,O3,F3,W3)
550 PRINT ,Q3; ' = الربيع الادنى '
560 PRINT
570 Y=(Q1-Q3)/2
580 PRINT ,Y; ' الانحراف الربيعي '
590 PRINT
600 O=(Q1-2*Q2+Q3)/(Q1-Q3)
610 PRINT USING 580, Q
620
630 PRINT
640 STOP
650 L1=A(J+1)
660 O1=C(J)
670 F1=B(J)-A(J)
680 W1=F(J+1)
690 RETURN

```

الرقم	الخطه	التكرار	التجمع التكرارى
###	###	###	###
###	###	###	###

المجموع

معامل الالتواء = .####

```

6651 L2=A(K+1)
6662 O2=C(K)
6673 P2=B(K)-A(K)
6684 W2=F(K+1)
6695 RETURN
6706 L3=A(V+1)
6717 O3=C(V)
6728 P3=B(V)-A(V)
6739 W3=F(V+1)
6750 RETURN
710 DEF FNA(L,X,O,P,W)=L+((X-O)*P)/W
720 DATA 7,3,7,1,7,11,3,11,15,11,15,19,20,19,23,9,23,27,4,27,31,2
750 END

```

### المخرجات

الترتيب	الفرق	التكرار	التمتع التكراري
1	7.0 - 3.0	1	1
2	11.0 - 7.0	3	4
3	15.0 - 11.0	11	15
4	19.0 - 15.0	20	35
5	23.0 - 19.0	9	44
6	27.0 - 23.0	4	48
7	31.0 - 27.0	2	50
		50	

المجموع

الربيع الاعلى = 20.1111

الوسيط = 17

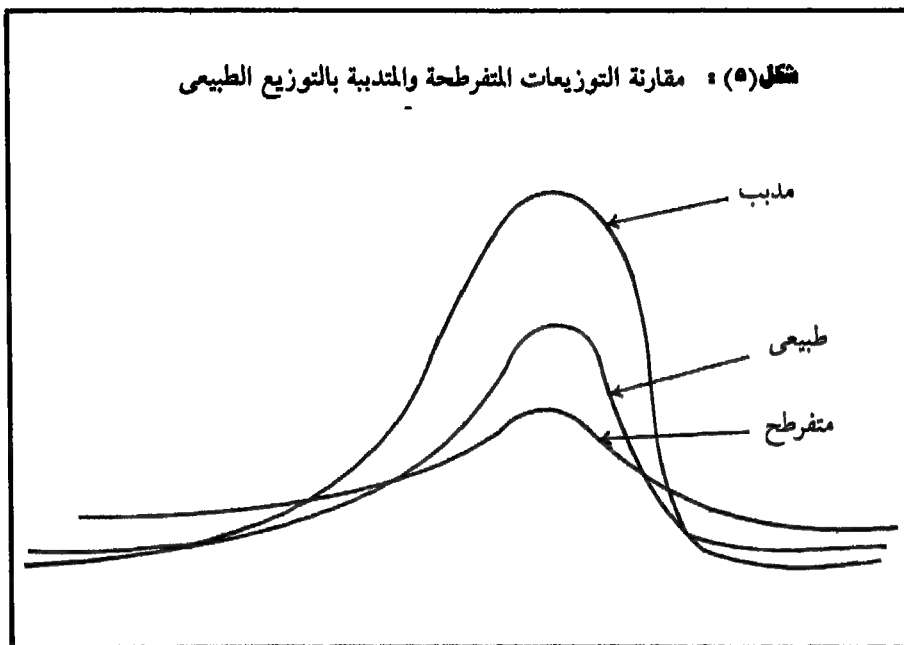
الربيع الادنى = 14.09091

الانحراف الربيعي = 3.010095

معامل الالتواء = .0336

### ٩. التفرطح (Kurtosis):

التفرطح عكس التدبب، فالتوزيع المتفرطح هو الذى يكون أقل ارتفاعاً من التوزيع الطبيعي، أما التوزيع المدبب فهو الأكثر ارتفاعاً من التوزيع الطبيعي؛ إذا فالتوزيع المتفرطح يتميز بمعامل اختلاف أكبر من الطبيعي لأن قمته أكثر تسطحاً.



ويعرف معامل التفرطح بأنه نسبة العزم الرابع إلى مربع العزم الثاني . أى أن :

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (٣١)$$

ومعلوم أن العزم الثانى هو التباين ، لذلك يزداد المقام كلما ازداد التشتت ، أى كلما قل معامل الاختلاف لنفس المفردات . وهذا يعنى أن معامل التفرطح يتناقص كلما ازداد التشتت ، أى كلما ازداد التفرطح . ومعامل التفرطح للتوزيع الطبيعى الأمثل يساوى ثلاثة . إذاً فالتوزيع مائل نحو التدبيب إذا زاد المعامل على ثلاثة ، ومائل نحو التفرطح إذا قل عن ذلك . ويلاحظ أن بسط معامل التفرطح وكذلك مقامه لا يكونان سالبين ؛ لذلك تكون قيمة التفرطح موجبة فى جميع الحالات ولا تساوى صفرأ ، إلا إذا كانت جميع القيم متساوية . أما العزوم الفردية وهى  $\mu_1$  ،  $\mu_3$  ،  $\mu_5$  ، فتساوى صفرأ إذا كان التوزيع متماثلاً كما ورد من قبل .

مثال (١٠، ٥) :

أوجد معامل التفرطح للبيانات أدناه :

الفئات	ك ر	س-ر-مت	(س-ر-مت) ك ر	(س-ر-مت) ك ر
٧-٣	١	١٢,٢٤*	١٤٩,٨١٧٦	٢٢٤٤٥,٣١٣٢٧
١١-٧	٣	٨,٢٤	٢٠٣,٦٩٢٨	١٣٨٣٠,٢٥٢٢٦
١٥-١١	١١	٤,٢٤	١٩٧,٧٥٣٦	٣٥٥٥,١٣٥١١٩
١٩-١٥	٢٠	٠,٢٤	١,١٥٢	٠,٠٦٦٣٥٥٢
٢٣-١٩	٩	٣,٣٦	١٢٧,٢٣٨٤	١٧٩٨,٨٦٤
٢٧-٢٣	٤	٧,٧٦	٢٤٠,٨٧٠٤	١٤٥٠٤,٦٣٧٤
٣١-٢٧	٢	١١,٧٦	٢٧٦,٥٩٥٢	٣٨٢٥٢,٤٥٢٣٣
المجموع	٥٠		١١٩٧,١٢٠	٩٤٣٨٦,٦٩

\* س = ١٧,٢٤

$$\frac{١١٩٧,١٢٠}{٥٠} = ٢٤$$

$$٢٣,٩٤٢ =$$

$$١٨٨٧,٧٣٤ = \frac{٩٤٣٨٦,٦٩}{٥٠} = ٤$$

$$٣,٢٩٣١ = \frac{٤}{٢(٢٤)} = \text{معامل التفرطح} = ٢$$

إذاً فالتوزيع قريب جداً من التامثل، إلا أنه مرتفع قليلاً نحو التدبب، ويمكن التأكد من صحة ذلك بمقارنة قيمة  $٢ = ٣,٢٧٠$  بالقيمة  $(٢)$  المجدولة بنهاية الفصل، والتي تساوى ٤,٨٨. وبما أن القيمة المحسوبة أقل من المجدولة فالنتيجة النهائية هي أن التوزيع لا يختلف اختلافاً جوهرياً عن التوزيع الطبيعي الأمثل.

البرنامج التالى يقوم بحساب الآتى :

- العزم الثانى .
- العزم الثالث .
- العزم الرابع .
- التفريط .
- الالتواء .
- الوسط الحسابى .
- معامل التفريط .

وباستخدام المعادلات :

$$M_2 = \frac{P}{T} ; M_4 = \frac{R}{T} ; K_1 = \frac{M_4}{(M^2)_2} \quad S_1 = \frac{M_4}{(M^2)_3}$$

حيث :

$M_2$	=	العزم الثانى
$M_4$	=	العزم الرابع
$K_1$	=	التفريط
$S_1$	=	الالتواء
$P$	=	مجموع مربعات الانحرافات مرجحة بالتكرارات
$T$	=	مجموع التكرارات



```

10 REM برنامح لحساب التفرطح
11 DIM A(7),B(7),C(7),D(7),E(7),F(7),H(7),L(7)
12 P=0
13 Q=0
14 R=0
15 S=0
16 T=0
17 D1=0
18 READ N
19 FOR I=1 TO N
20 READ A(I),B(I),F(I)
21 T=T+F(I)
22 C(I)=(A(I)+B(I))/2
23 D1=D1+D(I)*F(I)
24 NEXT I
25 M=D1/T
26 FOR I=1 TO N
27 L(I)=C(I)-M
28 H(I)=(C(I)-M)**2*F(I)
29 P=P+L(I)
30 R=R+H(I)
31 NEXT I
32 PRINT USING 250
33 PRINT USING 240
34 PRINT USING 250
35 ! (س-س) (س-س) (س-س) لكر العنسد
36 FOR I=1 TO N
37 PRINT USING 290, H(I),L(I),E(I),F(I),B(I),A(I)
38 ! #####
39 NEXT I
40 PRINT USING 320
41 PRINT
42 PRINT USING 350, R,P,T
43 ! #####
44 M2=P/T REM SECOND MOMENT
45 M4=P/T REM FOURTH MOMENT
46 K1=M4/M2**2 REM KURTOSIS
47 S1=M4/M2**3 REM SKEWNESS
48 PRINT
49 M2:= العزم الثاني
50 M4:= العزم الرابع
51 K1:= العزم الرابع
52 S1:= العزم الخامس
53 PRINT
54 M:= 'الوسط الحسابي'
55 K1:= 'معامل التفرطح'
56 PRINT
57 DATA 7,3,7,1,7,11,3,11,15,11,15,19,20,19,23,9,23,27,4,27,31,2
58 END

```

المخرجات

العنسد	لكر	(س-س)	(س-س) لكر	(س-س) لكر
7 - 3	1	-12.240	149.817	22445.240
11 - 7	3	-8.240	203.692	13830.180
15 - 11	11	-4.240	197.753	3555.097
19 - 15	20	-0.240	1.152	0.066
23 - 19	9	3.760	127.239	1798.864
27 - 23	4	7.760	240.871	14504.700
31 - 27	2	11.760	276.595	38252.570
المجموع	50		1197.119	94386.690

23.94238 = العزم الثاني  
 0 = العزم الثالث  
 1887.734 = العزم الرابع  
 3.293108 = العزم الخامس  
 137543 = العزم السادس  
 17.23999 = الوسط الحسابي  
 3.293108 = معامل التفرطح

البرنامج التالى يقوم بحساب الآتى :

- العزم الثانى .
- العزم الثالث .
- العزم الرابع .
- التفريط .
- الالتواء .

وتستخدم فيه نفس البيانات المستخدمة فى المثال (٥ , ٥) .

والمعادلات :

$$R_1 = R/T ; Q_1 = Q/T ; P_1 = P/T ;$$

$$K_1 = R_1/(P_1)^2 ; S_1 = (Q_1)^2 / (P_1)^3$$

حيث :

$R_1$	=	العزم الرابع
$Q_1$	=	العزم الثالث
$P_1$	=	العزم الثانى
$T$	=	مجموع التكرارات
$K_1$	=	التفريط
$S_1$	=	الالتواء

```

10 REM
20 DIM A(13),B(13),C(13),D(13),E(13),F(13),G(13),H(13),K(13),L(13)
30 F=0
40 R=0
50 S=0
60 T=0
70 D1=0
80 READ N REM عدد القيم
90 FOR I=1 TO N
100 READ A(I),B(I),F(I) REM الحد الأدنى، الحد الأعلى، التكرار
110 T=F(I)
120 C(I)=A(I)+B(I)/2
130 D(I)=C(I)*F(I)
140 D1=D1+D(I)
150 NEXT I
160 M=D1/T
170 FOR I=1 TO N
180 F(I)=C(I)-M
190 G(I)=C(I)-M**2+F(I)**2
200 H(I)=C(I)-M**3+F(I)**3
210 K(I)=ABS(E(I))*F(I)
220 L(I)=L(I)+K(I)
230 Q=Q+H(I)
240 R=R+K(I)
250 S=S+K(I)
260 NEXT I
270 PRINT USING 215
280 PRINT USING 210
290 PRINT USING 215
300 :
310 :
320 :
330 :
340 :
350 :
360 :
370 :
380 :
390 :
400 :
410 :
420 :
430 :
440 :
450 :
460 :
470 :
480 :
490 :
500 :
510 :
520 :
530 :
540 :
550 :
560 :
570 :
580 :
590 :
600 :
610 :
620 :
630 :
640 :
650 :
660 :
670 :
680 :
690 :
700 :
710 :
720 :
730 :
740 :
750 :
760 :
770 :
780 :
790 :
800 :
810 :
820 :
830 :
840 :
850 :
860 :
870 :
880 :
890 :
900 :
910 :
920 :
930 :
940 :
950 :
960 :
970 :
980 :
990 :
1000 :
1010 :
1020 :
1030 :
1040 :
1050 :
1060 :
1070 :
1080 :
1090 :
1100 :
1110 :
1120 :
1130 :
1140 :
1150 :
1160 :
1170 :
1180 :
1190 :
1200 :
1210 :
1220 :
1230 :
1240 :
1250 :
1260 :
1270 :
1280 :
1290 :
1300 :
1310 :
1320 :
1330 :
1340 :
1350 :
1360 :
1370 :
1380 :
1390 :
1400 :
1410 :
1420 :
1430 :
1440 :
1450 :
1460 :
1470 :
1480 :
1490 :
1500 :
1510 :
1520 :
1530 :
1540 :
1550 :
1560 :
1570 :
1580 :
1590 :
1600 :
1610 :
1620 :
1630 :
1640 :
1650 :
1660 :
1670 :
1680 :
1690 :
1700 :
1710 :
1720 :
1730 :
1740 :
1750 :
1760 :
1770 :
1780 :
1790 :
1800 :
1810 :
1820 :
1830 :
1840 :
1850 :
1860 :
1870 :
1880 :
1890 :
1900 :
1910 :
1920 :
1930 :
1940 :
1950 :
1960 :
1970 :
1980 :
1990 :
2000 :
2010 :
2020 :
2030 :
2040 :
2050 :
2060 :
2070 :
2080 :
2090 :
2100 :
2110 :
2120 :
2130 :
2140 :
2150 :
2160 :
2170 :
2180 :
2190 :
2200 :
2210 :
2220 :
2230 :
2240 :
2250 :
2260 :
2270 :
2280 :
2290 :
2300 :
2310 :
2320 :
2330 :
2340 :
2350 :
2360 :
2370 :
2380 :
2390 :
2400 :
2410 :
2420 :
2430 :
2440 :
2450 :
2460 :
2470 :
2480 :
2490 :
2500 :
2510 :
2520 :
2530 :
2540 :
2550 :
2560 :
2570 :
2580 :
2590 :
2600 :
2610 :
2620 :
2630 :
2640 :
2650 :
2660 :
2670 :
2680 :
2690 :
2700 :
2710 :
2720 :
2730 :
2740 :
2750 :
2760 :
2770 :
2780 :
2790 :
2800 :
2810 :
2820 :
2830 :
2840 :
2850 :
2860 :
2870 :
2880 :
2890 :
2900 :
2910 :
2920 :
2930 :
2940 :
2950 :
2960 :
2970 :
2980 :
2990 :
3000 :
3010 :
3020 :
3030 :
3040 :
3050 :
3060 :
3070 :
3080 :
3090 :
3100 :
3110 :
3120 :
3130 :
3140 :
3150 :
3160 :
3170 :
3180 :
3190 :
3200 :
3210 :
3220 :
3230 :
3240 :
3250 :
3260 :
3270 :
3280 :
3290 :
3300 :
3310 :
3320 :
3330 :
3340 :
3350 :
3360 :
3370 :
3380 :
3390 :
3400 :
3410 :
3420 :
3430 :
3440 :
3450 :
3460 :
3470 :
3480 :
3490 :
3500 :
3510 :
3520 :
3530 :
3540 :
3550 :
3560 :
3570 :
3580 :
3590 :
3600 :
3610 :
3620 :
3630 :
3640 :
3650 :
3660 :
3670 :
3680 :
3690 :
3700 :
3710 :
3720 :
3730 :
3740 :
3750 :
3760 :
3770 :
3780 :
3790 :
3800 :
3810 :
3820 :
3830 :
3840 :
3850 :
3860 :
3870 :
3880 :
3890 :
3900 :
3910 :
3920 :
3930 :
3940 :
3950 :
3960 :
3970 :
3980 :
3990 :
4000 :
4010 :
4020 :
4030 :
4040 :
4050 :
4060 :
4070 :
4080 :
4090 :
4100 :
4110 :
4120 :
4130 :
4140 :
4150 :
4160 :
4170 :
4180 :
4190 :
4200 :
4210 :
4220 :
4230 :
4240 :
4250 :
4260 :
4270 :
4280 :
4290 :
4300 :
4310 :
4320 :
4330 :
4340 :
4350 :
4360 :
4370 :
4380 :
4390 :
4400 :
4410 :
4420 :
4430 :
4440 :
4450 :
4460 :
4470 :
4480 :
4490 :
4500 :
4510 :
4520 :
4530 :
4540 :
4550 :
4560 :
4570 :
4580 :
4590 :
4600 :
4610 :
4620 :
4630 :
4640 :
4650 :
4660 :
4670 :
4680 :
4690 :
4700 :
4710 :
4720 :
4730 :
4740 :
4750 :
4760 :
4770 :
4780 :
4790 :
4800 :
4810 :
4820 :
4830 :
4840 :
4850 :
4860 :
4870 :
4880 :
4890 :
4900 :
4910 :
4920 :
4930 :
4940 :
4950 :
4960 :
4970 :
4980 :
4990 :
5000 :
5010 :
5020 :
5030 :
5040 :
5050 :
5060 :
5070 :
5080 :
5090 :
5100 :
5110 :
5120 :
5130 :
5140 :
5150 :
5160 :
5170 :
5180 :
5190 :
5200 :
5210 :
5220 :
5230 :
5240 :
5250 :
5260 :
5270 :
5280 :
5290 :
5300 :
5310 :
5320 :
5330 :
5340 :
5350 :
5360 :
5370 :
5380 :
5390 :
5400 :
5410 :
5420 :
5430 :
5440 :
5450 :
5460 :
5470 :
5480 :
5490 :
5500 :
5510 :
5520 :
5530 :
5540 :
5550 :
5560 :
5570 :
5580 :
5590 :
5600 :
5610 :
5620 :
5630 :
5640 :
5650 :
5660 :
5670 :
5680 :
5690 :
5700 :
5710 :
5720 :
5730 :
5740 :
5750 :
5760 :
5770 :
5780 :
5790 :
5800 :
5810 :
5820 :
5830 :
5840 :
5850 :
5860 :
5870 :
5880 :
5890 :
5900 :
5910 :
5920 :
5930 :
5940 :
5950 :
5960 :
5970 :
5980 :
5990 :
6000 :
6010 :
6020 :
6030 :
6040 :
6050 :
6060 :
6070 :
6080 :
6090 :
6100 :
6110 :
6120 :
6130 :
6140 :
6150 :
6160 :
6170 :
6180 :
6190 :
6200 :
6210 :
6220 :
6230 :
6240 :
6250 :
6260 :
6270 :
6280 :
6290 :
6300 :
6310 :
6320 :
6330 :
6340 :
6350 :
6360 :
6370 :
6380 :
6390 :
6400 :
6410 :
6420 :
6430 :
6440 :
6450 :
6460 :
6470 :
6480 :
6490 :
6500 :
6510 :
6520 :
6530 :
6540 :
6550 :
6560 :
6570 :
6580 :
6590 :
6600 :
6610 :
6620
```

جدول (م) (التواء)

حجم العينة	النسبة المئوية		الانحراف المعياري	حجم العينة	النسبة المئوية		الانحراف المعياري
	5%	1%			5%	1%	
25	0.711	1.061	0.4354	100	0.389	0.567	0.2377
30	0.662	0.988	0.4052	125	0.350	0.508	.2139
35	0.621	0.923	0.3804	150	0.321	0.484	.1961
40	0.587	0.870	0.3596	175	0.298	0.430	.1820
45	0.558	0.825	0.3418	200	0.280	0.403	.1706
50	0.534	0.787	.3264	250	0.251	0.360	.1531
60	0.492	0.723	0.3009	300	0.230	0.329	.1400
70	0.459	0.673	0.2806	350	0.213	0.305	.1298
80	0.432	0.631	0.2638	400	0.200	0.285	.1216
90	0.409	0.596	0.2498	450	0.188	0.269	.1147
100	0.389	0.567	0.2377	500	0.179	0.255	.1089

جدول (م) (التفرطح)

حجم العينة	النسبة المئوية				حجم العينة	النسبة المئوية			
	أعلى 5%	أعلى 1%	أدنى 5%	أدنى 1%		أعلى 5%	أعلى 1%	أدنى 5%	أدنى 1%
50	4.88	3.99	2.15	1.95	800	3.54	3.34	02.70	2.80
75	4.59	3.87	2.27	2.08	850	3.52	3.33	02.71	2.81
100	4.39	3.77	2.35	2.18	700	3.50	3.31	02.72	2.82
125	4.24	3.71	2.40	2.24	750	3.48	3.30	02.73	2.84
150	4.13	3.65	2.45	2.29	800	3.46	3.29	02.74	2.85
					850	3.45	3.28	02.74	2.86
200	3.98	3.57	2.51	2.37	900	3.43	3.28	02.75	2.86
250	3.87	3.52	2.55	2.42	950	3.42	3.27	02.76	2.87
300	3.79	3.47	2.39	2.46	1000	3.41	3.26	02.76	2.88
350	3.72	3.44	2.62	2.50					
400	3.67	3.41	2.64	2.52	1200	3.37	3.24	02.78	2.71
450	3.63	3.39	2.66	2.55	1400	3.34	3.22	02.80	2.72
500	3.60	3.37	2.67	2.57	1600	3.32	3.21	02.81	2.74
550	3.57	3.35	2.69	2.58	1800	3.30	3.20	02.82	2.76
600	3.54	3.34	2.70	2.60	2000	3.28	3.18	02.83	2.77

Snedcor (G.W.) and Cochran (W.G.); Statistical Methods; Jwo P. Press; IWOA, 1974; Table (6).

المصدر :

## تمارين

(١) قيس خمس قطع بأربع طرق مختلفة وكانت النتائج على النحو الآتي :

القطعة	الطريقة (أ)	الطريقة (ب)	الطريقة (ج)	الطريقة (د)
١	٣	٠,٠٣	١٠٣	١٠٣٠
٢	٦	٠,٠٦	١٠٦	١٠٦٠
٣	٩	٠,٠٩	١٠٩	١٠٩٠
٤	٥	٠,٠٥	١٠٥	١٠٥٠
٥	٧	٠,٠٧	١٠٧	١٠٧٠

فأوجد الانحراف المعياري للطول بكل طريقة .

(٢) إذا كانت س عينة من عدة متغيرات قوامها (ن) وحدة ، وإذا كان الانحراف المعياري لتلك العينة ع ، فاستخدم نتائج السؤال الأول لإيجاد الانحراف المعياري للعينة ص المكونة من (ن) وحدة إذا كان :

$$(أ) ص = س + ل$$

$$(ب) ص = ل س$$

علماً بأن ل مقدار (عدد) ثابت .

(٣) استخدم بيانات السؤال الأول لإيجاد المدى لكل طريقة وقارن بين النتائج .

(٤) أى الطرق الواردة فى السؤال الأول كانت نتائجها أكثر تجانساً؟

(٥) أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية الخاصة بتوزيع بعض المصابين في حوادث المرور حسب الأعمار، علماً بأن البيانات كانت خلال أحد مواسم الحج، والبيانات هي :

العمر بالسنوات	عدد المصابين في الرياض	عدد المصابين في جدة
٦ - ١	١	١
١٢ - ٧	٧	٣
١٨ - ١٣	١٥	٧
٢١ - ١٩	٣٠	١٠
٢٥ - ٢١	٢٧	١١
٣٠ - ٢٥	١٢	١٤
٣٨ - ٣١	٥	١٦
٤٨ - ٣٩	٢	١٨
٥٨ - ٤٩	١	٢٠

(٦) أي المدينتين في السؤال الخامس أكثر تشتتاً؟

(٧) أوجد التواء وتفريط البيانات الخاصة بكل مدينة في السؤال الخامس، وهل يمكن اعتبار التوزيعين طبيعيين؟

(٨) استخدم بيانات السؤال الخامس، لإيجاد الانحراف الربيعي لبيانات كل مدينة.

(٩) افتتحت شركة سعودية فرعاً لها في السودان، فإذا كان الوسط الحسابي لرواتب موظفيها في الرياض ٦٠٠٠ ريال، بينما كان الوسط الحسابي لرواتب موظفيها في الخرطوم ٦٠٠ جنيه، بينما كان التباين في الرياض ١٦٠٠٠٠ (ريال)² وفي الخرطوم ٩٠٠ (جنيه)²، فأوجد أي الموظفين أفضل مقارنة بزملائه في كل حالة :

- (أ) موظف راتبه في الرياض ٧٠٠٠ ريال، وموظف راتبه في الخرطوم ٧٠٠ جنيه.  
 (ب) موظف راتبه في الرياض ٦٠٠٠ ريال، وموظف راتبه في الخرطوم ٦٠٠ جنيه.  
 (ج) موظف راتبه في الرياض ٥٠٠٠ ريال، وموظف راتبه في الخرطوم ٥٠٠ جنيه.

(١٠) البيانات التالية تمثل تغيرات أسعار نفس النوع من التفاح خلال نفس الفترات في مدينتين، والأسعار هي :

الفترة	السعر في المدينة (أ) للكيلو الواحد بالريال	السعر في المدينة (ب) للكيلو الواحد بالريال
١	٢٥	٢٣
٢	٢٨	٢٤
٣	٢٢	٢٤
٤	٢٦	٢٦
٥	٣٥	٣٦
٦	٢٠	١٦

فأوجد التباين للأسعار في كل مدينة .

(١١) أى المدينتين أكثر استقراراً في سعر التفاح؟

(١٢) أوجد التباين للمدينتين معاً؟ هل يساوى مجموع التباينين؟ ولماذا؟

(١٣) اكتب برنامج بيسك لإيجاد الانحراف المعياري للبيانات الواردة بالسؤال (١) .

(١٤) اكتب برنامج بيسك لإيجاد الانحراف المعياري للبيانات الواردة بالسؤال (٥) .

(١٥) اكتب برنامج بيسك لإيجاد قيمة الالتواء والتفرطح لكل مدينة حسب البيانات في السؤال (٥)

(١٦) اكتب برنامج بيسك لإيجاد التباين للبيانات الواردة بالسؤال (١٠) .





---

**أهم التوزيعات الاحتمالية**

---

**الفصل  
السادس**



## أهم التوزيعات الاحتمالية



### ١ - المتغير العشوائى (Random Variable) :

تسمى كل عملية أجريت ولا يمكن التأكد من نتيحتها مسبقاً بالتجربة الإحصائية ، وتسمى مجموعة جميع النتائج المتوقعة بفضاء العينة (Sample Space) ، كما تسمى أى مجموعة جزئية من فضاء العينة بالحدث (Event) . فرمى زهر الطاولة (الرد) تجربة إحصائية ، والنقاط ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، تمثل فضاء العينة ، وأى نقطة من هذه النقاط أو مجموعة نقاط تمثل حادثاً .

أما الاختيار العشوائى فهو الذى استخدمت فيه إحدى طرق الاختيار العشوائى ، وطرق الاختيار العشوائى هى التى تعطى احتمالاً متساوياً لاختيار أى عنصر من العناصر المكونة للمجتمع الذى تم الاختيار منه . إذاً فاختيار أى نقطة من نقاط الزهر عند رميه يعتبر اختياراً عشوائياً . وأما المتغير الذى يمكن أن يظهر فى مدى - حيز - معين ، وباحتمالات مختلفة ، فيسمى بالمتغير العشوائى . وأما الحيز الذى تعرف به جميع المتغيرات العشوائية الخاصة بتجربة معينة ، فهو مجال للعينة أيضاً . لذلك فالمتغير العشوائى هو دالة ذات قيمة عددية (سالبة أو موجبة) معرفة على مجال العينة . فمجموع أى نقطتين مثلاً عند رمى زهر طاولة مرة واحدة يمثل متغيراً عشوائياً ضمن مجال العينة (فضاء أو فراغ) ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ .

يسمى التوزيع الذى يمثل الاحتمالات الخاصة بالمتغيرات العشوائية بدالة توزيع الاحتمال ، وهناك توزيعات احتمالية كثيرة سيعرض هنا أكثرها استخداماً .

## ٢ - التوزيع الطبيعي (Normal Distribution) :

هو أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداماً؛ لأن توزيع المتغيرات يكون طبيعياً في أكثر الحالات التطبيقية، كما أنه يمثل تقديراً دقيقاً لعدد كبير من التوزيعات الأخرى إذا كان عدد المتغيرات (ن) كبيراً.

لكل توزيع معالم، وللتوزيع الطبيعي مَعْلَمَان (Parameters) هما: الوسط الحسابي للمجتمع (μ) والانحراف المعياري لذلك المجتمع (σ). وإذا كانت ط تمثل القيمة الثابتة ٣,١٤ بينما تمثل هـ القيمة الأسية (Expoent) التي تساوي ٢,٧١٨ تقريباً فإن دالة توزيع المتغير العشوائي (ق(س)) هي :

$$(١) \quad \text{ق (س)} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(س-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{وتسمى القيمة } \frac{(س-\mu)}{\sigma} \text{ بالقيمة المعيارية}$$

لذلك عُرِفَ التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Dist.) بأنه توزيع طبيعي بوسط حسابي قدره صفر، وانحراف معياري قدره واحد، ودالة توزيع على النحو التالي :

$$(٢) \quad \text{ق (ي)} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

ولكثرة استخدامات التوزيع الطبيعي المعياري فقد دون في جداول (ملحق رقم ١)؛ ليسهل استخدامه في الحالات التطبيقية. هذا ويلاحظ أن حدود الجدول هي -٣ إلى +٣ وذلك لأن ٩٩,٧٪ من الحالات تنحصر في المساحة الواقعة بين -٣ و +٣ للتوزيع الطبيعي المعياري (راجع الانحراف المعياري والمقارنات بالفصل السابق).

أما المساحة الكلية لمنحنى دالة التوزيع الطبيعي المعياري فتساوي الوحدة، نصفها فوق الصفر، ونصفها تحته (٠,٥)؛ لذلك فإن جميع القيم المعيارية الموضحة على الجدول تزيد على ٠,٥ إذا كانت أكبر من الصفر، وتقل عنها إذا كانت أقل من الصفر. فهي إذاً توضح النسبة التي تحت القيمة المعيارية المعينة.

### مثال (٦,١) :

أوجد نسبة الطلاب الذين تزيد درجاتهم على ٨٢ درجة في مادة الرياضيات، إذا كان الوسط الحسابي للممتحنين ٧٦ درجة بانحراف معياري قدره ٤.

### الحل :

$$\begin{aligned} \text{ق (ى)} &= \text{ق} \left( \frac{\text{س} - \text{س}}{\text{ع}} \right) \\ (٣) \quad & \left( \frac{٧٦ - ٨٢}{٤} \right) \text{ ق} = \\ & \left( \frac{٦}{٤} \right) \text{ ق} = \\ & \text{ق (١,٥)} = \end{aligned}$$

القيمة المناظرة بالجدول لقيمة ق (١,٥) هي ٠,٩٣٣

إذاً هناك ٩٣,٣٪ من الطلاب لا تزيد درجاتهم على ٨٢، وعليه فنسبة الذين يزيدون على ٨٢ درجة هي :

$$١٠٠ - ٩٣,٣ = ٦,٧ \%$$

هذا ويمثل المساحة الواقعة تحت المنحنى الاحتمال أيضاً؛ لذلك فإن احتمال اختيار طالب واحد عشوائياً تكون درجته ٨٢ فما فوق يساوي ٠,٠٦٧

### مثال (٦,٢) :

المسافة التي يقطعها أحد العدائين ذات توزيع طبيعي بوسط حسابي قدره ٣ دقائق، وانحراف معياري يساوي ٢٠ ثانية، فما احتمال أن يقطع نفس المسافة في مدة تتراوح بين دقيقتين وخمسين ثانية وثلاث دقائق وعشرين ثانية؟

### الحل :

$$\begin{aligned} \text{س} &= ١٨٠ \text{ ثانية} \\ \text{ع} &= ٢٠ \text{ ثانية} \end{aligned}$$

الاحتمال (ح) هو المساحة المحصورة بين ٢٠٠ ثانية و ١٧٠ ثانية، وعليه تكون :

$$ق(ي) = ق\left(\frac{١٨٠-٢٠٠}{٣٠}\right) - ق\left(\frac{١٨٠-١٧٠}{٣٠}\right)$$

$$= ق(١) - ق\left(-\frac{١}{٣}\right)$$

وباستخدام الجدول :

$$ح = ق(ي) = ٠,٨٤١٣ - ٠,٣٠٨٥$$

$$ح = ٠,٥٣٢٨$$

### ٣ - التوزيع ذو الحدين (Binomial Distribution) :

هو توزيع كثير الاستخدام في حالة المتغيرات التي تنقسم إلى قسمين فقط، أحدهما يحمل صفة معينة والآخر لا يتمتع بتلك الصفة، فأوجه زهرة النرد بعضها يتميز بالأعداد الفردية وبعضها بالزوجية، والمواليد ذكور أو إناث، والمتحنون بعضهم ناجح وبعضهم فاشل، وكذلك المجيئون عن الأسئلة التي تحدد إجاباتها بنعم أو لا. ويشترط أن تكون كل تجربة مستقلة عن الأخرى، حتى تتبع المتغيرات العشوائية التوزيع ذا الحدين الذي يتميز بمعلمين، هما : عدد القيم العينية (ن)، واحتمال أن تنتهي التجربة بنجاح (ج)، وكلمة نجاح هنا تعنى حدوث الحدث المعين سواء كان ذلك الحدث مرغوباً فيه أم لا.

فإذا كانت (س) تمثل عدد حالات النجاح عند تكرار تجربة ذي الحدين لعدد ن مرة فمعادلة التوزيع ذي الحدين هي :

$$ح(س) = \binom{ن}{س} (ج)^س (١-ج)^{ن-س} \quad (٤)$$

$$س = ٠, ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠$$

و ح(س) تعنى احتمال النجاح س مرة.

### مثال (٦, ٣) :

احتمال أن تكون الإجابة بنعم عن أحد الأسئلة هو  $\frac{3}{4}$  ، فإذا أخذت عينة عشوائية من ٥ إجابات، فما احتمال أن تكون :

- أ - كل الإجابات بنعم؟
- ب - كلها لا؟
- ج - ٣ حالات بنعم؟
- د - ٣ حالات على الأقل بنعم؟

### الحل :

يمكن كتابة  $\binom{n}{s}$  على هذا النحو :  $\frac{n!}{s!(n-s)!}$

حيث  $n!$  هو مضروب  $n$  وهو ضرب كل الأعداد الموجبة من ١ إلى  $n$  فمثلاً

$$1! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots$$

هذا وتسمى  $\binom{n}{s}$  بالتوافيق، وهي عدد المجموعات الجزئية التي تتكون كل مجموعة منها من  $(s)$  عنصر، والتي يمكن استخراجها من مجموعة مكونة من  $n$  عنصراً.

هذا وتجدر الإشارة إلى أن  $1! = 1 \times 1 = 1$  ، أى أن مضروب الواحد يساوى مضروب الصفر.

وبتطبيق ذلك على السؤال السابق يمكن استخراج الاحتمال في كل حالة كما يلي، علماً بأن التوافيق يمكن استخراجها بواسطة تطبيق المعادلة السابقة أو الآلات الحاسبة العلمية أو الحاسبات الآلية أو استخدام الجداول (ملحق رقم ٥).

$$(أ) \quad \binom{5}{0} \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^5 =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0.237$$

$$\begin{aligned} (ب) \quad & {}^0\left(\frac{1}{4}\right) \cdot {}^0\left(\frac{3}{4}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = (٠) \quad (٠) \\ & {}^0\left(\frac{1}{4}\right) = \\ & ٠,٠٠١ = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ج) \quad & {}^2\left(\frac{1}{4}\right) {}^2\left(\frac{3}{4}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = (٣) \quad (٣) \\ & \frac{1}{16} \times \frac{27}{64} \times ١٠ = \\ & ٠,٢٦٤ = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (د) \quad & (٥) \quad (٣ \leq s) \quad (٣) \quad (٣) \quad (٤) \quad (٤) \quad (٥) \\ & {}^0\left(\frac{1}{4}\right) {}^0\left(\frac{3}{4}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) + {}^2\left(\frac{1}{4}\right) {}^2\left(\frac{3}{4}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \\ & \sum_{s=3}^5 \binom{n}{s} (ج-س) (١-ج-ن-س) = \\ & ٠,٢٣٧ + ٠,٣٩٦ + ٠,٢٦٤ = \\ & ٠,٨٩٧ = \end{aligned}$$

أما الوسط للمتغيرات التي تتبع التوزيع ذا الحدين فهو  $n \cdot p$  وأما الانحراف المعياري فهو  $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$  أي أن التباين هو  $n \cdot p \cdot (1-p)$ . فعدد الإجابات المتوقع أن تكون بنعم من بين الإجابات السابقة هو :

$$٣,٧٥ = \frac{3}{4} \times ٥$$



والانحراف المعياري لذلك التقدير هو :

$$0.968 = \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 5}$$

يعتبر التوزيع ذو الحدين هو أقدم التوزيعات، إذ سبق التوزيع الطبيعي بعشرين عاماً. هذا ولقد عرف التوزيع الطبيعي عندما كان أحد العلماء (De Moivre) يحاول إيجاد معادلة للتوزيع ذي الحدين عندما يكون عدد المتغيرات (ن) كبيراً، ولقد فوجئ ذلك العالم بأن التوزيع المنفصل يتحول إلى توزيع متصل هو التوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة كبيراً. ولقد تبعت ذا الحدين في ذلك أكثر التوزيعات الاحتمالية، وهو ما عرف أخيراً بنظرية النهاية المركزية (Central Limit Theorem).

#### ٤ = توزيع مربع كاي (chi square distribution)

اتضح مما مضى أنه إذا كانت س ذات توزيع طبيعي بوسط قدره (و) وانحراف معياري (م) فإن :

$$Y = \frac{S - \mu}{\sigma} \quad (5)$$

ذات توزيع طبيعي أيضاً بوسط صفر وانحراف معياري واحد.

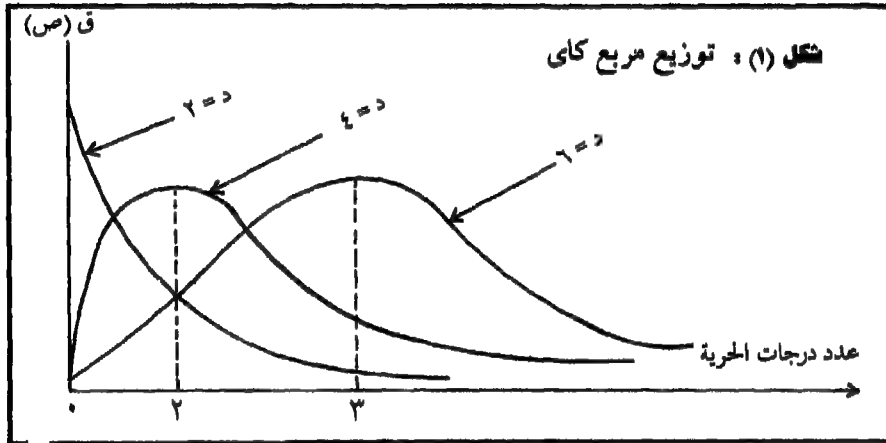
$$V = \frac{(S - \mu)^2}{\sigma^2} \quad (6)$$

فهى ذات توزيع جديد يسمى مربع كاي ( $\chi^2$ )، ولربع كاي معلم واحد يسمى درجات الحرية (د). ومربع التوزيع الطبيعي المعياري يتبع توزيع مربع كاي بدرجة حرية واحدة ( $\chi^2_1$ ). وأما معادلته فهى على النحو التالى :

$$Q(V) = \frac{\frac{1}{V} - \frac{1}{2V}}{\sqrt{\frac{1}{2V}}} \quad (7)$$

حيث Q تعنى الاقتران (الدالة) والرموز ص، ط، هـ كان قد تم تعريفها من قبل.

هذا ، ويساوى وسط مربع كاي عدد درجات الحرية (د) بينما يساوى تباينه ضعف درجات الحرية (٢ د). أما شكل التوزيع فيبلغ قمته عند د - ٢ ويقترب من التوزيع الطبيعي كلما ازداد عدد درجات الحرية (د) ، إلى أن يصبح توزيعاً طبيعياً ، عندما يكون عدد درجات الحرية كبيراً .



يستمد توزيع مربع كاي أهميته في المجال التطبيقي من الخصائص الثلاث التالية :

#### الخاصية الأولى :

مجموع المتغيرات العشوائية ، التي يتبع كل منها توزيعاً مستقلاً لمربع كاي ، يكون تابعاً أيضاً توزيع مربع كاي ، وبعدد من درجات الحرية مساوٍ لمجموع درجات حريات التوزيعات المستقلة .

فإذا كان  $\chi^2 = \chi^2_1 + \chi^2_2$  حيث  $\chi^2_1$  تتبع توزيع مربع كاي بعدد من درجات الحرية يساوى د<sub>١</sub> ، و  $\chi^2_2$  تتبع توزيعاً مستقلاً لمربع كاي بعدد من درجات الحرية يساوى د<sub>٢</sub> ، فإن  $\chi^2$  ذات توزيع لمربع كاي بعدد د<sub>١</sub> + د<sub>٢</sub> من درجات الحرية .

أما إذا كانت  $\chi^2_1$  ،  $\chi^2_2$  ،  $\chi^2_3$  ، ... ،  $\chi^2_n$  عينات عشوائية من توزيع طبيعي بوسط (و) ، وانحراف معياري (م) ، وإذا كانت

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{m} = \chi^2_m$$

فإن ص ذات توزيع يتبع لمربع كاي بعدد من درجات الحرية يساوى (ن)؛ ذلك لأن مربع التوزيع الطبيعى المعيارى لكل متغير يتبع توزيع مربع كاي بدرجة حرية واحدة.

### الخاصية الثانية :

إذا كانت س<sub>١</sub> تتبع توزيع مربع كاي بعدد من درجات الحرية يساوى د<sub>١</sub> ، وإذا كانت س<sub>٢</sub> تتبع توزيعاً مستقلاً لمربع كاي بعدد من درجات الحرية يساوى د<sub>٢</sub> حيث د<sub>١</sub> < د<sub>٢</sub> وإذا كانت ص = س<sub>١</sub> - س<sub>٢</sub> فإن ص تتبع توزيع مربع كاي بعدد من درجات الحرية يساوى د<sub>١</sub> - د<sub>٢</sub> .

### الخاصية الثالثة :

إذا كانت س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub> ، . . . س<sub>ن</sub> عينة عشوائية من توزيع طبيعى بوسط (و) ، وانحراف معيارى (م) . وإذا كانت س<sub>٢</sub> ع<sub>٢</sub> هما الوسط الحسابى والتباين الخاصان بالعينة واللذان يستخدمان لتقدير قيمتى (و) و (م) على التوالى ، وإذا كانت :

$$(٨) \quad \frac{\sum_{j=1}^n (س_j - س)^2}{٢م} = ص.$$

فإن ص تتبع توزيع مربع كاي بعدد من درجات الحرية يساوى (ن - ١) ، حيث ن هو حجم العينة.

وبما أن

$$(٩) \quad \frac{\sum (س_j - س)^2}{١ - ن} = ع^2$$

فإن :

$$(١٠) \quad \frac{\sum (س_j - س)^2}{٢م} = \frac{ع^2 (١ - ن)}{٢م}$$

وعليه فإن :

$$\frac{ع^2 (١ - ن)}{٢م}$$

يتبع أيضاً توزيع مربع كاي بعدد من درجات الحرية يساوى (ن - ١). ولعل هذا هو السبب الذى يجعل قسمة مجموع مربعات الانحرافات على (ن - ١) بدلاً من (ن). هذا، والغريب فى الأمر هو أن  $\bar{S}$  و  $\bar{S}^2$  تمثلان إحصائيتين لنفس المتغيرات العشوائية إلا أنهما مستقلتان تماماً بعضهما عن بعض، كذلك يلاحظ أن الفرق بين الخاصية الأولى والثالثة هو استبدال الوسط الخاص بالمجتمع (و) بالوسط الحسابى للعينة ( $\bar{S}$ ). ولقد أدى هذا الاستبدال إلى نقصان عدد درجات الحرية بواحد؛ وذلك لأن :

$$(١١) \quad \frac{\sum (S - \bar{S})^2}{n} + \frac{\sum (S - \bar{S})^2}{n} = \frac{\sum (S - \bar{S})^2}{n}$$

والجزء الثانى من الجانب الأيسر فى المعادلة السابقة يتبع توزيع مربع كاي بدرجة حرية واحدة، ويمكننا الآن التأكد من صحة المعادلة الهامة، فالجانب الأيسر من المعادلة هو :

$$n \times \frac{\sum (S - \bar{S})^2}{n} + \frac{\sum (S - \bar{S})^2}{n}$$

يمكن إعادة صياغة البسط على النحو التالى :

$$\begin{aligned} & \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + n \bar{S}^2 + \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + n \bar{S}^2 \\ &= \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + n \bar{S}^2 + \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + n \bar{S}^2 \\ &= \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + n \bar{S}^2 \\ &= \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + n \bar{S}^2 \\ &= \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + \sum S^2 - 2 \sum S \bar{S} + n \bar{S}^2 \end{aligned}$$

(١٢)

وباستخدام الخاصية الثانية للتوزيع يتضح أن استبدال وسط المجتمع بالوسط الحسابي للعينة ينقص عدد درجات الحرية بواحد.  
تستخدم جداول مربع كاي (ملحق رقم ٣) لإيجاد القيم التي تقع إلى يسارها أو يمينها مساحة معينة (احتمال).  
والمساحة الواقعة إلى يسار القيمة تعنى احتمال (ح) أن تكون قيمة المتغير العشوائى (س) أقل من، أو تساوى، قيمة محددة (ص). وتكتب على النحو التالى :

$$ح (س \geq ص)$$

لذلك فالمساحة الواقعة إلى يمين قيمة متغير ما، زائداً المساحة إلى يسار نفس قيمة المتغير تساوى واحداً. أى أن :

$$ح (س \geq ص) + ح (س < ص) = ١$$

هذا، ويلاحظ أن جدول توزيع مربع كاي قد قسم أفقياً مئينيات معينة ذات دلالات خاصة فى التقدير الإحصائى، واختبار الفروض كما سيتضح فيما بعد، كما أنه قد قسم رأسياً على عدد درجات الحرية التى يقع عليها التوزيع. ولعله من المتوقع أن يزداد الاحتمال أفقياً لنفس العدد من درجات الحرية، لأن قيمة المتغير تزداد أفقياً. أما إذا زاد عدد درجات الحرية، وأردنا الحصول على نفس المساحة الواقعة على يسار (الاحتمال)، فيلزم ذلك زيادة قيمة توزيع مربع كاي.

#### مثال (٦،٤) :

أوجد احتمال أن تكون قيمة المتغير العشوائى (س) التابع لتوزيع مربع كاي على ١٠ درجات حرية أقل من، أو تساوى :

$$(أ) ٢,١٦$$

$$(ب) ١٥,٩٩$$

$$(ج) ٢٣,٢١$$

#### الحل :

باستخدام جدول مربع كاي وبالنظر لصف د = ١٠ يتضح أن :

$$(أ) ح (س \geq ٢,١٦) = ١ - ٠,٩٩٥ =$$

$$٠,٠٠٥ =$$

$$(ب) \quad ح (س \geq 15,99) = 1 - 0,1 = 0,9$$

$$= 0,9$$

$$(ج) \quad ح (س \geq 23,21) = 1 - 0,1 = 0,9$$

$$= 0,99$$

### مثال (٥, ٦) :

أوجد قيمة مربع كاي (ص) إذا كان :

$$(أ) \quad ح (س \geq 0,005) = 0,005$$

$$(ب) \quad ح (س \geq 0,90) = 0,90$$

$$(ج) \quad ح (س \geq 0,99) = 0,99$$

علماً بأن المتغير العشوائي (ص) يتبع لتوزيع مربع كاي على ٢٠ درجة حرية.

### الحل :

باستخدام جدول مربع كاي وعند تقاطع  $د = 20$  مع الاحتمالات السابقة، يتضح أن :

$$(أ) \quad ص = 7,43$$

$$(ب) \quad ص = 28,4$$

$$(ج) \quad ص = 37,6$$

هناك علاقة تقريبية بين قيم توزيع مربع كاي والتوزيع الطبيعي المعياري، عندما يكون عدد درجات الحرية أكبر من ٣٠. فإذا كانت (أ) تعني الاحتمال، بمعنى أن

$$ح (س \geq ك) = أ$$

هي احتمال أن تكون قيمة س أقل من، أو تساوي، قيمة معينة، تساوي (أ).

وإذا كانت ق (ي) = أ تعني احتمال أن تكون القيمة المعيارية (ي) التابعة للتوزيع الطبيعي المعياري يساوي (أ) أيضاً فالعلاقة هي :

$$(١٣) \quad \sqrt{2 ك} - \sqrt{1 - د 2} = ق (ي)$$

$$(١٤) \quad ك = \frac{1}{2} (ق (ي) + \sqrt{1 - د 2})^2$$

### مثال (٦,٦) :

أوجد قيمة المتغير العشوائي التابع لتوزيع مربع كاي على ٧٠ درجة والذى تقع على يساره ٠,٩٧٥ من المساحة .

### الحل :

$$٧٠ = د$$

$$٠,٩٧٥ = أ$$

وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري يتضح أن :

$$١,٩٦ = ق (٠,٩٧٥)$$

$$\frac{\sqrt{١-١٤٠}}{\sqrt{١٣٩}} = \frac{\sqrt{١-٢}}{\sqrt{١٣٩}}$$

$$١١,٨ = \frac{\sqrt{١-٢}}{\sqrt{١٣٩}}$$

$$\frac{١}{٢} (ق (٠,٩٧٥) + \sqrt{١-٢}) = ك$$

$$\frac{١}{٢} (١١,٨ + ١,٩٦) =$$

$$\frac{١}{٢} (١٣,٧٦) =$$

$$١٨٩,٣ \times \frac{١}{٢} =$$

$$٩٥ =$$

### ٥ - توزيع ف (F Distribution) :

إذا كان المتغير العشوائي س<sub>١</sub> يتبع توزيع مربع كاي على د<sub>١</sub> من درجات الحرية ، وإذا كان المتغير س<sub>٢</sub> يتبع أيضاً توزيعاً لمربع كاي ، ولكنه على د<sub>٢</sub> من درجات الحرية فإن :

$$\frac{س١ / د١}{س٢ / د٢} \quad (١٥)$$

تتبع لتوزيع فيشر (ف) بعدد من درجات حرية يساوى د<sub>١</sub> و د<sub>٢</sub> . وتسمى د<sub>١</sub> بعدد درجات حرية البسط و د<sub>٢</sub> عدد درجات حرية المقام ويكتب على النحو التالى :

$$ف د١، د٢ .$$

إذا فتوزيع فيشر (Fisher) هو عبارة عن نسبة توزيعين لمربع كاي، كل مقسوم على درجات حريته، شريطة أن يكونا مستقلين .

### مثال (٦، ٧) :

أثبت أن نسبة تباين العينة الأولى إلى تباين العينة الثانية المستقلة تتبع توزيع ف، وبين عدد درجات الحرية للتوزيع، مفترضاً أن تباينى المجتمعين اللذين سحبت منهما العينتان متساويان .

### الحل :

افرض أن عدد قيم العينة الأولى يساوى ن<sub>١</sub> بينما عدد قيم العينة الثانية يساوى ن<sub>٢</sub> ، وافرض أن ع<sub>١</sub> و ع<sub>٢</sub> يمثلان تباينى العينة الأولى والثانية على التوالى . كما أن م<sub>١</sub> و م<sub>٢</sub> هما تباينا المجتمعين اللذين سحبت منهما العينتان . باستخدام الخاصية الثالثة لتوزيع مربع كاي يتضح أن :

$$\frac{(ن١ - ١) ع١}{١٢} \text{ تتبع لتوزيع مربع كاي على } (ن١ - ١) \text{ درجات حرية}$$

بذلك :

$$\frac{(ن٢ - ٢) ع٢}{٢٢} \text{ تتبع لتوزيع مربع كاي على } (ن٢ - ٢) \text{ درجات حرية}$$

وبافتراض أن م<sub>١</sub> = م<sub>٢</sub> وبقسمة كل مقدار على عدد درجاته من الحرية يتضح أن :

$$ف = \frac{\frac{(ن١ - ١) ع١ / [ (ن١ - ١) ]}{١٢}}{\frac{(ن٢ - ٢) ع٢ / [ (ن٢ - ٢) ]}{٢٢}} = \frac{(ن١ - ١) ع١}{(ن٢ - ٢) ع٢}$$



وبما أن

$${}^2_1m = {}^2_1m \quad \text{فإن :}$$

$$(16) \quad \frac{{}^2_1E}{{}^2_1E} = \text{ف } (1 - {}^2_1n), (1 - {}^2_1n)$$

ولهذه النتيجة استخدامات كثيرة جداً في اختبارات الفروض، لذلك يسمى توزيع فيشر في بعض الحالات بتوزيع نسبة التباين (Variance - Ratio Distribution).

هذا، ولقد دون توزيع (ف) في جداول (ملحق رقم ٤). وبما أن له معلمين، هما : عدد درجات حرية البسط، وعدد درجات حرية المقام، فلقد دونت درجات البسط على الأعمدة (أفقياً)، ودونت درجات المقام في أول عمود على اليسار، وعلى مقدمة الجدول نسبة المساحة الواقعة إلى يمين القيمة المعنية. وسوف يتضح استخدام هذه الجداول في الفصول القادمة.

## ٦ - توزيع ت (Student t-Distribution) :

إذا كانت  $Y$  تمثل متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، وإذا كانت  $S$  متغيراً عشوائياً مستقلاً عن  $Y$  ويتبع توزيع مربع كاي على عدد من درجات الحرية يساوي  $D$  فتوزيع (ت) على عدد من درجات الحرية يساوي  $D$  أيضاً هو :

$$(17) \quad T = \frac{Y}{\sqrt{S^2/D}}$$

أي أنه نسبة التوزيع الطبيعي المعياري إلى الجذر التربيعي لتوزيع مربع كاي، مقسوماً على درجات حرته.

## مثال (٦، ٨) :

أوجد العلاقة بين توزيع ت وتوزيع ف.

**الحل :**

$$T = \frac{Y}{\sqrt{S^2/D}}$$

$$(18) \quad (ت D) = \frac{{}^2_1Y}{S^2/D}$$

بما أن مربع التوزيع الطبيعي المعياري يتبع توزيع مربع كاي على عدد من درجات الحرية يساوي الواحد . .

إذا :

$$\frac{\chi^2 / 2}{\text{س} / \text{د}} = \chi^2_{(د)}$$

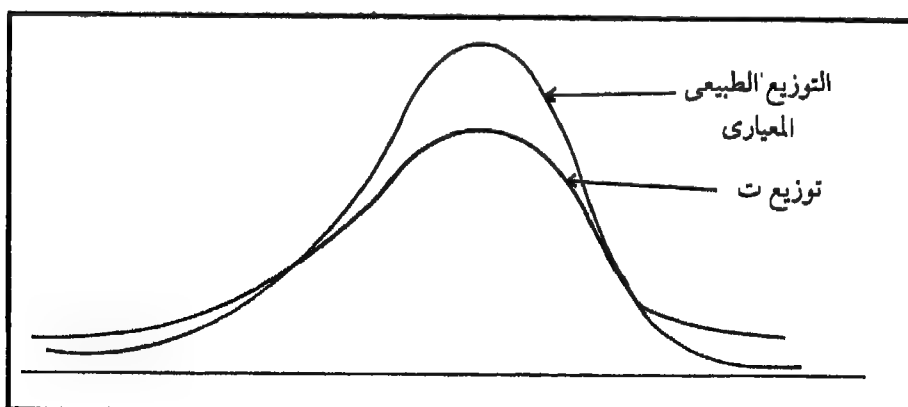
$$\text{ف} = \text{د} \cdot \chi^2_{(د)}$$

وبمعنى آخر فإن :

(١٩)

$$\sqrt{\text{ف} / \text{د}} = \text{ت}$$

وهذا يعني أن ف ، د ، تساوي مربع قيمة ت ، ويمكن للقارئ التأكد من ذلك بعد معرفة كيفية استخدام جداول (ت) ، التي تعتمد على معلم واحد هو عدد درجات الحرية (ملحق رقم ٢) . هذا ، وتستخدم جداول ت بنفس طريقة استخدام جداول مربع كاي .  
وتجدر الإشارة هنا إلى أن توزيع ت يشبه إلى حد كبير التوزيع الطبيعي المعياري ، إلا أن المساحة حول الصفر أكبر لدى التوزيع الطبيعي ، وبالتالي أصبح أعلى قمة من توزيع ت . كما أن طرفي (ذيلي) التوزيع الطبيعي أقرب إلى المحور الأفقي عند النهاية .  
هذا ، ويقترّب توزيع ت من التوزيع الطبيعي كلما ازداد عدد درجات الحرية ، إلى أن يتساوى معه عندما يصبح عدد درجات الحرية كبيراً .



## ٧ - توزيع الوسط الحسابى للعينة (Sampling Distribution of Sample Means) :

إذا سحبت العينات س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub> ، . . . . ، س<sub>ن</sub> من نفس المجتمع ، وبطريقة تجعل كل عينة مستقلة عن الأخرى (بطريقة عشوائية) ، وإذا كانت الأوساط الحسابية لتلك العينات هي س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub> ، . . . . ، س<sub>ن</sub> ، فالوسط الحسابى لكل عينة يمثل تقديراً لوسط المجتمع (و). وسواء كان التوزيع الخاص بالمجتمع طبيعياً أو غير طبيعى ، فإن الوسط الحسابى لأوساط العينات (ن) التى يساوى حجم كل منها ن هو :

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}{n}$$

يتبع توزيعاً وسطه ( و ) وتباينه  $\frac{\sigma^2}{n}$  حيث م<sup>٢</sup> هو تباين المجتمع الذى سحبت منه العينات ويسمى الانحراف المعيارى لتوزيع الوسط الحسابى للعينة (  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ) بالخطأ المعيارى للوسط (Standard Error of the Mean) ويلاحظ هنا أن م<sup>٢</sup> الخطأ المعيارى للوسط) أقل من الانحراف المعيارى لأى وسط من أوساط العينات . كما أن الخطأ المعيارى يتناقص بزيادة ن ، أى بزيادة تكرار المعاينة . وهذا يعنى أن زيادة حجم العينات المسحوبة يزيد من دقة تقدير وسطها الحسابى (س) لوسط المجتمع (و) .

مثال (٩، ٦) :

جلس ٦ طلاب للاختبار فى مادة الرياضيات وكانت درجاتهم :

٦٨ ، ٧٠ ، ٧٢ ، ٧٤ ، ٧٦ ، ٧٨

أوجد جميع العينات الثنائية الممكنة ، وأوساطها ، والوسط الحسابى لها .

الحل :

يوضح الجدول التالى كل العينات الثنائية التى يمكن سحبها والتى تساوى ٣٦ عينة .

**جدول رقم (١) : العينات وأوساطها الحسابية**

الوسط الحسابي (م. ر)	العينات	الوسط الحسابي (م. ر)	العينات
٧١	٧٤ ٦٨	٦٨	٦٨ ٦٨
٧٢	٧٤ ٧٠	٦٩	٦٨ ٧٠
٧٣	٧٤ ٧٢	٧٠	٦٨ ٧٢
٧٤	٧٤ ٧٤	٧١	٦٨ ٧٤
٧٥	٧٤ ٧٦	٧٢	٦٨ ٧٦
٧٦	٧٤ ٧٨	٧٣	٦٨ ٧٨
٧٧	٧٦ ٦٨	٦٩	٧٠ ٦٨
٧٨	٧٦ ٧٠	٧٠	٧٠ ٧٠
٧٩	٧٦ ٧٢	٧١	٧٠ ٧٢
٨٠	٧٦ ٧٤	٧٢	٧٠ ٧٤
٨١	٧٦ ٧٦	٧٣	٧٠ ٧٦
٨٢	٧٦ ٧٨	٧٤	٧٠ ٧٨
٨٣	٧٨ ٦٨	٧٠	٧٢ ٦٨
٨٤	٧٨ ٧٠	٧١	٧٢ ٧٠
٨٥	٧٨ ٧٢	٧٢	٧٢ ٧٢
٨٦	٧٨ ٧٤	٧٣	٧٢ ٧٤
٨٧	٧٨ ٧٦	٧٤	٧٢ ٧٦
٨٨	٧٨ ٧٨	٧٥	٧٢ ٧٨

فالوسط الحسابي للعينات :

$$\frac{٧٨ + ٧٧ + ٧٦ + \dots + ٧٠ + ٦٩ + ٦٨}{٣٦} = \text{س}$$

$$\frac{٢٦٢٨}{٣٦} =$$

$$٧٣ =$$

أما الخطأ المعياري للوسط في هذه الحالة فهو :

$$(20) \quad \sigma = \frac{\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{2,4}{\sqrt{6}} = 0,98$$

أما الوسط الحسابي للمجتمع فهو :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{78 + 76 + 74 + 72 + 70 + 68}{6} = 73 \\ &= \frac{438}{6} = 73 \end{aligned}$$

بينما الانحراف المعياري للمجتمع هو :

$$(21) \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \right)^{1/2} = \frac{3,4}{\sqrt{6}} = 1,38$$

وبما أن حجم العينة هنا = 6 فإن :

$$\frac{3,4}{\sqrt{6}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = 1,38$$

البرنامج التالي يقوم بحساب الآتي لمجموعة من البيانات :

- جميع العينات الممكنة.
- الوسط الحسابي لكل عينة.
- الوسط الحسابي للعينات كلها.
- الخطأ المعياري لوسط العينة.
- الوسط الحسابي للمجتمع.
- الانحراف المعياري لوسط المجتمع.
- الخطأ المعياري لوسط المجتمع.

بالمعادلات التالية :

$$X_1 = S/N_1 = \text{الوسط الحسابي للمجتمع}$$

$$V_1 = \sqrt{(R - \frac{(S)^2}{N_1}) / N_1} = \text{الانحراف المعياري للمجتمع}$$

$$X_2 = S/N_2 = \text{الوسط الحسابي لأوساط العينات}$$

$$V_2 = \sqrt{(R - \frac{S^2}{N_2}) / N_2} = \text{الانحراف للأوساط}$$

$$E = V_1 / \sqrt{N_3} = \text{الخطأ المعياري للوسط}$$

```

10 REM برنامج لاجاد جميع العينات الممكنة واوساطها الحسابية
20 DIM A(5),T(35)
30 READ N1,N2,N3
40 REM N1=عدد المشاهدات، N2=عدد العينات، N3=حجم العينة
50 MAT READ A
60 PRINT USING 70
70 PRINT USING 80
80 :
90 :
100 :
110 :
120 :
130 :
140 :
150 :
160 :
170 :
180 :
190 :
200 :
210 :
220 :
230 :
240 :
250 :
260 :
270 :
280 :
290 :
300 :
310 :
320 :
330 :
340 :
350 :
360 :
370 :
380 :

```

البيانات الاصلية

###  
 ### = الوسط الحسابي للمجتمع  
 ##.### = الانحراف المعياري للمجتمع

العينات واوساطها الحسابية

العينه	الوسط الحسابي
###	###
###	###
###	###
##.###	##.###
##.###	##.###

الوسط الحسابي لأوساط العينات = ###  
 الانحراف المعياري لأوساط العينات = ##.###  
 الخطأ المعياري للوسط = ##.###

```

325 PRINT
330 PRINT USING 260
340 PRINT USING 270
350 PRINT USING 280
360 PRINT USING 290
370 FOR I=1 TO N1
380 FOR J=1 TO N1

```

```

390 T(K)=(A(I)+A(J))/2
400 PRINT USING 300,T(K),A(J),A(I)
410 S=S+T(K)
420 R=R+T(K)**2
430 K=K+1
440 NEXT J
450 NEXT I
460 X2=S/N2
470 V2=SQR((R-S**2/N2)/N2)
480 E=V1/SQR(N3)
485 PRINT
490 PRINT USING 310,X2
500 PRINT USING 320,V2
510 PRINT USING 325,E
520 DATA 6,36,2,68,70,72,74,76,78
530 END

```

المخرجات

البيانات الاصلية

68  
70  
72  
74  
76  
78

الوسط الحسابي للمجموع = 73  
الانحراف المعياري للمجموع = 3.416

العينات واوساطها الحسابية

الوسط الحسابي	العينة
68	68
69	70
70	72
71	74
72	76
73	78
69	68
70	70
71	72
72	74
73	76
74	78
70	68
71	70
72	72
73	74
74	76
75	78
71	68
72	70
73	72
74	74
75	76
76	78
72	68
73	70
74	72
75	74
76	76
77	78
73	68
74	70
75	72
76	74
77	76
78	78

الوسط الحسابي لاوزات العينات = 73  
الانحراف المعياري لاوزات العينات = 2.415  
الخطا المعياري للوسط = 2.415

وهكذا أصبح وسط العينة مطابقاً تماماً لوسط المجتمع (٧٣)، بينما تساوى الخطأ المعياري مع الانحراف المعياري للمجتمع. هذا، وتجدر الإشارة إلى أن تباين وسط العينة يكون أقرب للقيمة

$$\frac{\frac{2}{n}}{\frac{n-1}{n}}$$

حيث  $n$  هي حجم المجتمع. ويسمى معامل تباين الوسط بمعامل التصحيح الذي لا يستخدم إلا إذا كان حجم المجتمع صغيراً جداً. أما إذا كان حجم المجتمع كبيراً فإن قيمته تقترب من الواحد.

وأما التوزيع التكراري للأوساط الحسابية للعينات السالفة الذكر فهو كما يلي :

#### جدول (٢)

التوزيع التكراري للأوساط الحسابية للعينات الثنائية البالغ عددها ٣٦ عينة.

الأوساط الحسابية (س.ر.)	التكرار (ك.ر.)
٦٨	١
٦٩	٢
٧٠	٣
٧١	٤
٧٢	٥
٧٣	٦
٧٤	٥
٧٥	٤
٧٦	٣
٧٧	٢
٧٨	١
المجموع	٣٦



التوزيع التكرارى السالف الذكر يمثل توزيعاً متماثلاً حول الوسط، بمعامل التواء يساوى الصفر، ومعامل تفرطح يساوى ٢, ٤، فهو بذلك لا يختلف اختلافاً جوهرياً عن التوزيع الطبيعي الأمثل. وليس ذلك مجرد صدفة، أو حالة خاصة، ولكن توزيع أوساط العينات يزداد قرباً من التوزيع الطبيعي، كلما ازداد عدد العينات، أى كلما ازداد عدد الأوساط (ن). وعليه تكون:

$$\bar{X} \sim \left( \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (22)$$

حيث ( $\sim$ ) تعنى أن المتغير يتبع التوزيع، و ( $\mu$ ) تعنى «طبيعى». ويؤدى ذلك إلى اعتبار أن:

$$\bar{X} \sim \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (23)$$

إلا أن اقتراب توزيع المتغيرات العشوائية من التوزيع الطبيعي المعيارى ليس مقصوراً على وسط أوساط العينات، فلقد ثبت أن هذه الخاصية يمكن تعميمها على جميع الأوساط الحسابية إذا كان عدد المتغيرات (ن) كبيراً. لذلك فقد جاءت صياغة النهاية المركزية (Central Limit Theorem)، أو النظرية الأساسية لتقارب العينات على النحو الآتى:

#### نظرية (١):

«إذا كانت  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية تتبع توزيعاً واحداً، وسطه ( $\mu$ )، وانحرافه المعيارى ( $\sigma$ )، وإذا كانت ( $\bar{X}$ ) هى الوسط الحسابى لتلك المتغيرات العشوائية، فالتوزيع النهائى ( $\bar{X} \rightarrow \infty$ ) للمتغير:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

هو التوزيع الطبيعي المعيارى».

وتجدر الإشارة هنا إلى أن مقدار (ن) الذى يصبح بموجبه التوزيع طبيعياً ليس محدداً؛ إذ أنه يزداد كلما كان التوزيع الأسمى للمتغيرات بعيداً عن التوزيع الطبيعي، إلا أن أكثر المراجع تعتبر ٣٠ حداً أدنى لقيمة (ن).

يبد أن هناك حالات كثيرة يكون فيها تباين المجتمع (م<sup>٢</sup>) غير معلوم، وعندها يلجأ الباحث لاستخدام العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع مربع كاي؛ ذلك لأن توزيع تباين العينة (ع<sup>٢</sup>) الذي يعتبر مقدراً لتباين المجتمع يتبع توزيع مربع كاي.

$$(٢٤) \quad \text{وبما أن :} \quad \frac{Y}{\sqrt{\frac{K^2}{n}}} \sim T(n)$$

حيث  $Y \sim \text{ط} (., ١)$

$n =$  عدد درجات حرية توزيع مربع كاي (ك<sup>٢</sup>) ومن ثم عدد درجات توزيع (ت).

$$(٢٥) \quad \text{وبما أن :} \quad \frac{(n-1)E^2}{M^2} \sim K^2_{(n-1)}$$

فإن :

$$(٢٦) \quad T(n-1) \sim \frac{\left( \frac{S^2 - W}{n/2} \right)}{\frac{1}{2} \left( \frac{(n-1)E^2}{M^2(n-1)} \right)}$$

$$\text{إذاً :} \quad T(n-1) \sim \frac{S^2 - W}{E/n}$$

وهذا يعنى أنه إذا استبدل تباين العينة عوضاً عن تباين المجتمع، فسوف يصبح التوزيع تابعاً لتوزيع ت على (ن - ١) درجات حرية.

## ٨ - توزيع مجموع الوسطين أو الفرق بينهما :

نظرية (٢) :

«إذا تم سحب عيتين مستقلتين من مجتمعين موزعين توزيعاً طبيعياً، الأول : بوسط (و<sub>١</sub>) وتباين (م<sub>١</sub><sup>٢</sup>)، والثاني : بوسط (و<sub>٢</sub>) وتباين (م<sub>٢</sub><sup>٢</sup>). وإذا كان حجم العينة الأولى (ن<sub>١</sub>)

ووسطها (س<sup>٢</sup>)، بينما كان حجم العينة الثانية (ن<sub>٢</sub>) ووسطها الحسابي (ص<sup>٢</sup>).  
فإن :

$$\tau(1, 0) \sim \frac{س + ص - (و_١ + و_٢)}{\sqrt{\frac{١٢}{ن_١} + \frac{٢٢}{ن_٢}}}$$

أى أن مجموع الوسطين موزع توزيعاً طبيعياً بوسط يساوى مجموع وسطين، وتباين يساوى مجموع تباينى الوسطين؛ ذلك لأن :

$$س \sim \tau(و_١, \frac{١٢}{ن_١})$$

$$ص \sim \tau(و_٢, \frac{٢٢}{ن_٢})$$

$$س + ص \sim \tau(و_١ + و_٢, \frac{١٢}{ن_١} + \frac{٢٢}{ن_٢})$$

أما في حالة الفرق بين الوسطين فإن :

$$س - ص \sim \tau(و_١ - و_٢, \frac{١٢}{ن_١} + \frac{٢٢}{ن_٢})$$

وعليه :

$$(٢٧) \quad \tau(1, 0) \sim \frac{(س - ص) - (و_١ - و_٢)}{\frac{1}{\sqrt{\frac{١٢}{ن_١} + \frac{٢٢}{ن_٢}}}}$$

هذا، ويمكن التعويض عن و<sub>١</sub> و و<sub>٢</sub> بتباينى العينتين ع<sub>١</sub> وع<sub>٢</sub> على التوالى، إذا كان حجم العينة كبيراً فى الحالتين، بينما كان تباين العينتين مجهولين. وبذلك يصبح توزيع مجموع الوسطين على النحو التالى :

$$(٢٨) \quad \tau(1, 0) \sim \frac{(س + ص) - (و_١ + و_٢)}{\sqrt{\frac{١٤}{ن_١} + \frac{٢٤}{ن_٢}}}$$

أما إذا كانت  $m = m_1 = m_2$ ، أى أن تباينى المجتمعين متساويان، فتوزيع مجموعهما هو :

$$(29) \quad \frac{(s_1^2 + s_2^2) - (n_1 + n_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim m$$

بيد أن هناك حالات كثيرة يكون فيها حجم العينتين صغيرين بدرجة لا يمكن معها التعويض بتباينيهما عن تباينى المجتمعين. وبافتراض أن تباينى المجتمعين متساويان ( $m = m_1 = m_2$ )، واعتماداً على توزيع مربع كاي وخواصه التى تحدد أن :

$$(30) \quad \chi^2_{(n-1)} \sim \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

$$(31) \quad \chi^2_{(n-2)} \sim \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}$$

وبما أن :

$$(32) \quad \chi^2_{(n-2+n_1+n_2)} \sim \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} + \frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma^2}$$

واعتماداً على أن الوسط الحسابى والتباين لنفس العينة يكونان مستقلين بعضهما عن بعض فإن :

$$(33) \quad \frac{(1, 0)}{\sqrt{(n-2+n_1+n_2)/2}} = \frac{\left( \frac{(s_1^2 + s_2^2) - (n_1 + n_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right)}{\left( \frac{\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} + \frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma^2}}{(n-2+n_1+n_2)} \right)}$$

وتكون فرضية العدم هنا إما على النحو الآتى :

$$f_1 : w_1 < w_2$$

أو :

$$f_1 : w_1 > w_2$$

أو بمعنى آخر :

$$f_1 - f_2 < \text{صفر}$$

أو :

$$f_1 - f_2 > \text{صفر}$$

وفى جميع هذه الحالات تكون على طرف واحد، وتعنى أن هناك وسطاً أكبر من الآخر.

كذلك قد تكون الفرضية البديلة على النحو التالى :

$$f_1 : w_1 \neq w_2$$

وهى فرضية ذات طرفين تعنى أن هناك فرقاً جوهرياً بين الوسطين.

أما إذا كان الفرق المحدد بفرضية العدم غير الصفر - يساوى ل مثلاً حيث ل قيمة معلومة -  
بمعنى أن :

$$f_1 : w_1 - w_2 = L \text{ وهى فرضية عدم بسيطة.}$$

أو كانت مزدوجة على النحو الآتى :

$$f_1 : w_1 - w_2 < L$$

فقد تكون الفرضية البديلة على النحو الآتى :

$$f_1 : w_1 - w_2 < L$$

أو

$$f_1 : w_1 - w_2 > L$$

أو

$$f_1 : w_1 - w_2 \neq L$$

أى أن : 
$$(38) \quad \text{ط} (1, 0) \sim \frac{\text{س} - \text{ن ح}}{\sqrt{\text{ن ح} (1 - \text{ح})}}$$

أما إذا كان الهدف هو تحديد نسبة الذين يتمتعون بتلك الصفة بدلاً من عددهم للاستدلال بنسبة العينة على نسبة المجتمع، فإذا كانت  $\text{ح}$  تعنى نسبة العينة فإن :

$$\frac{\text{س}}{\text{ن}} = \text{ح}$$

وبقسمة بسط ومقام المعادلة على  $\text{ن}$  يصبح التوزيع :

(39) 
$$\text{ط} (1, 0) \sim \frac{\text{ح} - \text{ح}}{\sqrt{\frac{\text{ح} (1 - \text{ح})}{\text{ن}}}}$$

وهى شبيهة بتوزيع وسط العينة بعد استبدال  $\text{ح}$  مكان  $\text{س}$  و  $\text{ح} (1 - \text{ح})$  مكان  $\text{م}^2$ .  
لذلك يمكن استخدام معادلتى المجموع، والفرق بين وسطين، لتقدير توزيع المجموع والفرق بين نسبتيين، وذلك على النحو التالى :

(40) 
$$\text{ط} (1, 0) \sim \frac{(\text{ح}_2 + \text{ح}_1) - (\text{ح}_2 - \text{ح}_1)}{\sqrt{\frac{\text{م}_2^2}{\text{ن}_2} + \frac{\text{م}_1^2}{\text{ن}_1}}}$$

حيث  $\text{م}_1^2 = \text{ح}_1 (1 - \text{ح}_1)$

$\text{م}_2^2 = \text{ح}_2 (1 - \text{ح}_2)$

أما توزيع الفرق بين نسبتيين فهو :

(41) 
$$\text{ط} (1, 0) \sim \frac{(\text{ح}_2 - \text{ح}_1) - (\text{ح}_2 - \text{ح}_1)}{\sqrt{\frac{\text{م}_2^2}{\text{ن}_2} + \frac{\text{م}_1^2}{\text{ن}_1}}}$$

وبما أن مربع التوزيع الطبيعي المعياري هو مربع كاي على درجة حرية واحدة.

فإن :

$$(42) \quad \chi^2 \sim \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

نظوية (4)

إذا كانت  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  هي متغيرات عشوائية متعددة على التوزيع  
ذى الحدين، وإذا كانت  $n, n-1, n-2, \dots, n-k$  هي معالم التوزيعات

حيث

$$(43) \quad 1 = n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-k)$$

فإن :

$$(44) \quad \chi^2 \sim \frac{(n-k)S^2}{\sigma^2}$$

فإذا كانت

$$L = 2$$

بينما

$$S_1 = \text{عدد حالات النجاح}$$

و

$$S_2 = \text{عدد حالات الفشل}$$

فإن

$$S_2 - 1 = S_1$$

كما أن :

$$S_2 - n = S_1$$

وعليه :

$$\frac{{}^2(s_2 - n_2 h_2)}{n_2 h_2} + \frac{{}^2(s_1 - n_1 h_1)}{n_1 h_1} = \frac{{}^2(s_r - n_r h_r)}{n_r h_r} \sum_{r=1}^2$$

$$(٤٦) \quad {}^2_k \sim \frac{{}^2(s_1 - n_1 h_1)}{n_1 h_1 (1 - h_1)} =$$

وبما أن  $s_r$  هي دائماً عدد حالات النجاح التي تحققت، أو عدد تكرار حالات النجاح  $(k_r)$  بينما  $n_r h_r$  تمثل عدد حالات النجاح المتوقعة في المجتمع  $(k_r)$ ، لذلك فإن :

$$(٤٧) \quad {}^2_k \sim \frac{\sum_{r=1}^n (k_r - n_r h_r)}{k_r}$$



## تمارين

(١) إذا كانت ح تعنى احتمالاً، بينما تعنى  $y$  القيمة المعيارية، فأوجد ما يلي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي :

- (أ) ح ( $y > 1$ ).
- (ب) ح ( $y < 1$ ).
- (ج) ح ( $1 > y > 2$ ).
- (د) ح ( $|y| > \frac{1}{4}$ ).

(٢) استخدم نفس رموز السؤال الأول وجدول التوزيع الطبيعي لإيجاد قيمة  $w$  إذا كان :

- (أ) ح ( $y < w$ ) = ٠,٠٢٥
- (ب) أثبت أن ح ( $y < w$ ) = ح ( $y > -w$ )، لأى قيمة بين الصفر والثلاثة.
- (ج) ح ( $|y| > w$ ) = ٠,٩٥

(٣) يفترض أن توزيع رواتب العاملين بإحدى المؤسسات يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابى ٦٠٠٠ ريال، وانحراف معيارى ٣٠٠٠ ريال. فإذا تم اختيار أحد العاملين بتلك المؤسسة اختياراً عشوائياً فما احتمال أن يكون راتبه :

- (أ) ٦٠٠٠ ريال.
- (ب) ٩٠٠٠ ريال.
- (ج) ٣٠٠٠ ريال.
- (د) أكثر من ٥٠٠٠ ريال.
- (هـ) أقل من ٥٠٠٠ ريال.
- (و) أكثر من ٩٠٠٠ ريال.
- (ز) أقل من ٩٠٠٠ ريال.
- (ح) بين ٤٠٠٠ ريال و ١٠٠٠٠ ريال.

- (٤) ينتج أحد المصانع قضباناً حديدية حمولة القطعة منها ١٥٠ كيلوجراماً، بانحراف معياري ١٠ كيلوجرامات. فما هو عدد القطع من بين ١٠٠٠ قطعة المتوقع أن تكون حمولته بين ١٤٥ و ١٦٠ كيلوجراماً؟
- (٥) نسبة المراجعين (لأحد المستوصفات) المصابين بأحد أمراض الباطنية تساوى ١٠٪، فإذا اختيرت عينة عشوائية قوامها ١٠ مراجعين فما احتمال أن تكون :

- (أ) كلها خالية من ذلك المرض .  
 (ب) كلها مصابة بذلك المرض .  
 (جـ) عدد المصابين شخصين فقط .  
 (د) عدد المصابين ٣ أشخاص فقط .  
 (هـ) عدد المصابين بين ٤ و ٧ أشخاص .  
 (و) ما هو عدد المصابين المتوقع من بين أفراد العينة؟

(٦) اذكر العلاقة بين كل توزيعين :

- (أ) ذى الحدين والطبيعى .  
 (ب) الطبيعى ومربع كاي .  
 (جـ) مربع كاي و ت .  
 (د) ت و ف .  
 (هـ) ف ومربع كاي .

(٧) إذا كان و متغيراً عشوائياً يتبع توزيع مربع كاي على ١٥ درجة حرية، فأوجد :

- (أ)  $P(W \geq 0.90)$   
 (ب)  $P(W \geq 0.005)$   
 (جـ)  $P(W \geq 0.99)$

(٨) كانت أوزان المدافعين الأربعة لإحدى الفرق كما يلي :  
 ٧٠ كيلوجراماً ، ٧٤ كيلوجراماً ، ٦٨ كيلوجراماً ، ٦٤ كيلوجراماً .  
 أوجد جميع العينات الثنائية الممكنة، وأوساطها الحسابية، والوسط الحسابى لها جميعاً.

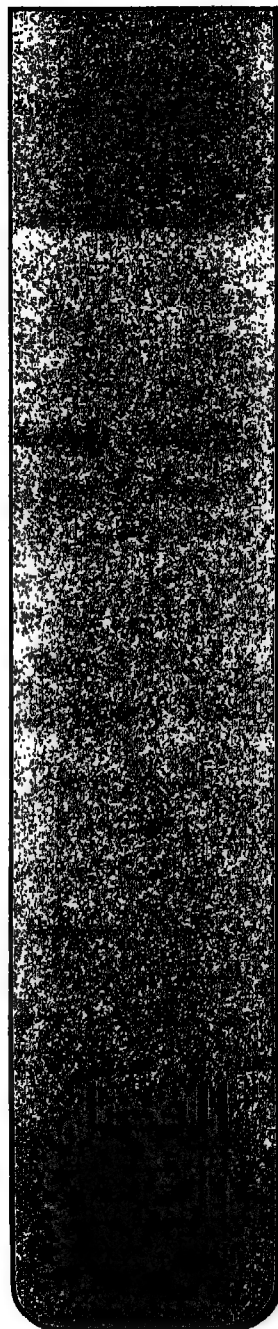
- (٩) ما هى أهم مزايا توزيع ت ومتى يستخدم؟  
 (١٠) متى يستخدم توزيع ف؟

---

**فترات الثقة**

**CONFIDENCE INTERVALS**

---





## فترات الثقة

(Confidence Intervals)



### ١ - الاستدلال الإحصائي (Statistical Inference) :

الاستدلال الإحصائي هو نوع من أنواع اتخاذ القرارات في ظروف عدم التأكد، ويهدف الاستدلال الإحصائي إلى الوصول للقرار الأسلم، اعتماداً على الاحتمالات، أى بزيادة احتمال أن يكون القرار سليماً. وبما أنه لا يمكن التأكد بصورة قاطعة من سلامة أو عدم سلامة القرار المتخذ في ظروف عدم التأكد، فقد أصبح الاستدلال الإحصائي هو أفضل البدائل المتاحة أمام الإنسان في المجالات التي يمكن استخدامه فيها. هذا، وتنقسم مجالات استخدام الاستدلال الإحصائي إلى ثلاثة أقسام، وهى :

١ - تقدير النقطة.

٢ - تقدير الفترة.

٣ - اختبارات الفرضيات.

والتقدير بنوعيه السابقين هو اختيار قيمة محددة كبديل لمعلمة مجهولة، وهذا البديل هو واحد من سلسلة متصلة للبدائل الممكنة باحتمالات مختلفة، أما اختبار الفرضية فيعنى في مجمله قبول أو رفض قيمة محددة - أو عدة قيم - خاصة بمعلمة معينة. هذا، وتختلف القيود المستخدمة في التقدير عن تلك التى تستخدم لاختبار الفرضية.

اهتمت الفصول السابقة بتقدير معالم المجتمع بدلالات القيم العينية، فقدر وسط المجتمع (و) بالوسط الحسابى للعينة (س)، وقدر تباين المجتمع (م) بتباين العينة (ع). هذا، ولقد تمثلت دلالات القيم العينية بالعزوم، كذلك قدر وسط المجتمع وتباينه في حالة معرفة التوزيع الإحصائي الذى تتبعه المتغيرات العشوائية. ويسمى ذلك النوع من التقديرات

بالتقدير بنقطة (Point Estimation) ؛ لأنه يعتمد على اختيار نقطة واحدة من سلسلة من النقاط لتقدير أحد معالم المجتمع . أما تقدير الفترة - كما يدل على ذلك اسمه - فهو يتعلق بتحديد فترة تسمى فترة الثقة يرجح ، وباحتمال كبير، أن يكون المعلم محصوراً بين تلك الحدود .

وتنقسم فترات أو حدود الثقة إلى ثلاثة أقسام رئيسية ، وهى :

١ - فترات الثقة للأوساط .

٢ - فترات الثقة للنسب .

٣ - فترات الثقة للتباينات .

هذا ، وسوف يتم استعراض كل قسم من هذه الأقسام فى هذا الفصل لينفرد الفصل التالى باختبار الفرضيات .

## ٢ - فترات الثقة للأوساط (Confidence Intervals for Means) :

بالرغم من أن وسط العينة (س) يمثل تقديراً جيداً لوسط المجتمع (و) ، إلا أنه لا يساويه تماماً ، فقد اتضح من الفصل الماضى أن العينات المستقلة المسحوبة من نفس المجتمع تنتهى فى أكثر الحالات إلى تقديرات مختلفة لنفس المعلمة (Parameter) .

ولقد اتضح من الفصل الماضى أن الوسط الحسابى للعينات يتبع التوزيع :

$$(١) \quad \bar{X} \sim \left( \mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

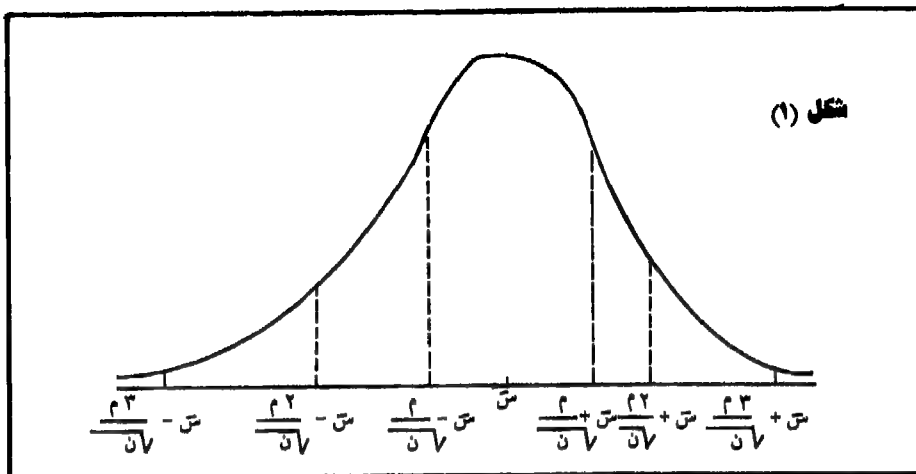
حيث  $n$  هو حجم العينة .

وهذا يعنى أن :

$$(٢) \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \text{س} \quad \text{س} \sim \text{ط} (٠, ١)$$

وعليه فمن الجائز القول بأن (و) ربما تنحصر فى الفترة  $\bar{X} \pm \mu / \sqrt{n}$  كما أن هناك احتمالاً أكبر بأن تكون الفترة هى  $\bar{X} \pm ٢ \mu / \sqrt{n}$  ، وهكذا .

إلا أن هذه الحدود تختلف باختلاف أوساط العينات فى حالة تساوى الحجم (ن) ، بيد أن التوزيع الخاص بوسط العينات هو توزيع طبيعى حسب ما سلف ذكره . إذاً فهناك ٦٨,٣% من الأوساط تنحصر فى الفترة  $\bar{X} \pm \mu / \sqrt{n}$  كما أن هناك ٩٥% من الأوساط تنحصر فى الفترة

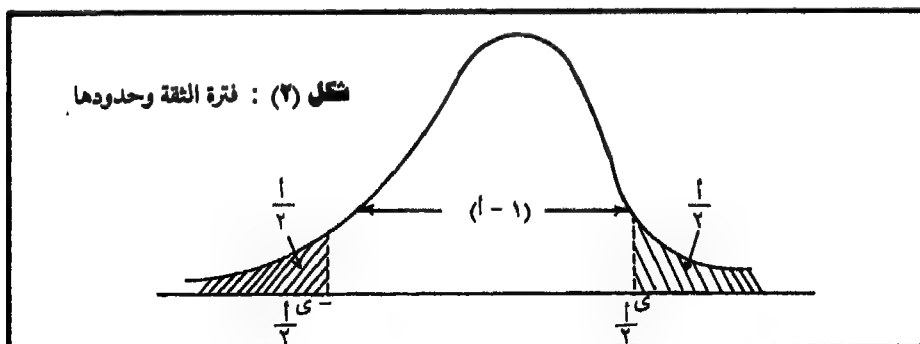


شكل (١)  $\bar{x} \pm 1,96 \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$  وهناك ٩٩٪ من الأوساط تنحصر في الفترة  $\bar{x} \pm 2,57 \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ . انظر الشكل (١) السابق. إلا أنه لا يمكن تحديد الفترة التي تنحصر فيها جميع الأوساط وبالتالي وسط المجتمع؛ ذلك لأن طرفي التوزيع الطبيعي يمتدان إلى ما لا نهاية، كما أنه ليس أمراً منطقياً أن يتم سحب جميع العينات الممكنة عند إجراء كل دراسة.

إذا كانت

$$Y = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \quad (3)$$

فإن  $Y$  قيمة معيارية. وأما إذا كانت  $Y = 1 - \frac{1}{4}$  تعني أن المساحة المحصورة بين  $Y = \frac{1}{4}$  وما لا نهاية تساوي  $\frac{1}{4}$  فإن  $Y = (1 - \frac{1}{4})$  هي عدد الانحرافات التي تنحصر بينها ١٠٠٪  $(1 - \frac{1}{4})$  من القيم. إذاً فهناك ١٠٠٪ من المساحة تنحصر بين  $Y = \frac{1}{4}$  و  $Y = -\frac{1}{4}$  بسبب تشابه التوزيع الطبيعي (انظر الشكل (٢) التالي).



هذا، وتسمى الفترة ١٠٠ (١ - أ)٪ بفترة الثقة (Confidence Interval) وتسمى نقطتا نهايتها بحدود الثقة (Confidence Limits). وبذلك تكون فترة الثقة بمستوى ١٠٠ (١ - أ)٪ لوسط المجتمع هي النسبة المئوية من الأوساط الحسابية التي تنحصر بين حدى تلك الفترة عند تكرار تجربة سحب عينة بحجم ن عدة مرات. وبناء عليه تكون :

$$(٤) \quad \frac{1}{4} \leq \frac{\bar{y} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} < \frac{1}{4} +$$

وهذا يعنى أن :

$$\bar{y} - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \bar{y} + \frac{1}{4}$$

وبالضرب فى (١ - أ) تكون النتيجة النهائية على النحو التالى :

$$(٥) \quad \bar{y} - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \bar{y} + \frac{1}{4}$$

وهى أيضاً :

$$(٦) \quad \bar{y} - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \bar{y} + \frac{1}{4}$$

فإذا كانت درجة الثقة هى ٩٠٪ أو ٩٥٪ أو ٩٩٪ فإن  $\frac{1}{4}$  تساوى ٠,٠٥ أو ٠,٢٥ أو ٠,٠٥٥ على التوالى. أما  $\frac{1}{4}$  فتكون على النحو التالى (راجع جدول التوزيع الطبيعى بالملحق) :

$$1,64 = 0,90$$

$$1,96 = 0,95$$

$$2,57 = 0,99$$



### مثال (٢,١) :

أخذت عينة من درجات ٢٥ طالباً في مادة الرياضيات، فوجد أن وسطها الحسابي ٧٢ درجة، فما فترة ٩٠٪ ثقة للوسط لجميع الطلاب، إذا كان التوزيع طبيعياً بتباين يساوي مائة؟ ما طول الفترة؟

### الحل :

$$٢٥ = ن$$

$$٧٢ = س$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} (١ - ٠,٩٥)$$

$$٠,٠٥ =$$

$$١,٦٤ = ي$$

$$١٠٠ = م$$

$$١٠ =$$

$$(٦) \quad \frac{م}{ن} \sqrt{٠,٩٥} - س < و < \frac{م}{ن} \sqrt{٠,٩٥} + س$$

$$\frac{م}{ن} \sqrt{٠,٩٥} - س = \text{الحد الأدنى لفترة الثقة}$$

$$\frac{م}{ن} \sqrt{٠,٩٥} + س = \text{الحد الأعلى لفترة الثقة}$$

$$\frac{١٠}{٥} \times ١,٦٤ - ٧٢ = \text{الحد الأدنى}$$

$$٣,٢٨ - ٧٢ =$$

$$٦٨,٧ =$$

$$٣,٢٨ + ٧٢ = \text{الحد الأعلى}$$

$$٧٥,٢٨ =$$

$$\text{الحد الأعلى} - \text{الحد الأدنى} = \text{طول الفترة}$$

$$٦٨,٧٢ - ٧٥,٢٨ =$$

$$٦,٥٦ =$$

$$\frac{م}{ن} \sqrt{\left(\frac{١}{٢} - ١\right)} = \text{إذا طول الفترة}$$

بما أن

$$(3) \quad \frac{\bar{y} - \mu}{\sqrt{\frac{V}{N}}} = Y$$

فإن :

$$(7) \quad \sqrt{N} (\bar{y} - \mu) = MY$$

وعليه تكون :

$$(8) \quad \frac{MY}{\sqrt{N}} = \frac{\bar{y} - \mu}{\sqrt{\frac{V}{N}}}$$

والمعادلة السابقة توضح الحجم المناسب للعينة ، والذي بموجبه يمكن أن يكون الفرق بين وسط العينة ووسط المجتمع بقدر معلوم وباحتمال محدد . هذا ، ويلاحظ أن حجم العينة يزداد كلما قل ذلك الفرق ، أى أن زيادة حجم العينة يزيد من دقة التقدير .

البرنامج التالى يقوم بحساب وتحديد الحد الأدنى والحد الأعلى للثقة - بمستوى ٩٥٪ - وطول الفترة باستخدام المعادلة :

$$\bar{X} \pm C \sqrt{\frac{V}{N}}$$

حيث :

X = الوسط الحسابى

C = القيمة الطبيعية المجدولة = ١,٦٤

V = التباين

N = حجم العينة

```

10 REM برنامج لحساب الحد الأدنى والحد الأعلى للثقة وطول الفترة
20 READ N,X,V,C
30 DATA 25,72,100,1.64
40 I=X-C*(SQR(V)/SQR(N)) REM الحد الأدنى
50 H=X+C*(SQR(V)/SQR(N)) REM الحد الأعلى
60 I=H-I REM طول الفترة
70 PRINT TAB(20);I; 'الحد الأدنى'
80 PRINT TAB(20);H; 'الحد الأعلى'
90 PRINT TAB(20);I; 'طول الفترة'
100 PRINT
110 END

```

المخرجات

الحد الأدنى = 68.71999  
الحد الأعلى = 75.28  
طول الفترة = 6.560013

### مثال (٢, ٧) :

ما هو حجم العينة الذي بموجبه يمكن التأكد، بمستوى ٩٥٪، من أن تقدير وسط العينة لن يكون مخطئاً بأكثر من ٣ وحدات، عن وسط المجتمع في المثال السابق؟

### الحل :

$$(٨) \quad \frac{م \text{ ي}}{(س - و)} = \sqrt{n}$$

$$\frac{١,٦٤ \times ١٠}{٣} =$$

$$\frac{٢(١,٦٤) \times ١٠٠}{٩} = n \quad \therefore$$

$$٣٠ =$$

تكون قيمة تباين المجتمع مجهولة في أكثر الحالات، خاصة في المجالات الاجتماعية، لذلك يمكن استبدالها بتباين العينة إذا كان حجم العينة كبيراً. أما إذا كان حجم العينة صغيراً جداً - أقل من ٢٠ أو ٣٠ - فلا مناص من استبدال التوزيع الطبيعي بتوزيعات على عدد (ن - ١) درجة حرية، وذلك لأن :

$$(٩) \quad \frac{س - و}{\sqrt{\frac{ع}{n}}} = t_{(n-1)}$$

أما بقية المعادلة الخاصة بحدود الثقة فتظل على ما كانت عليه، بعد استبدال القيم المعيارية بقيم ت.

### مثال (٢, ٧) :

أخذت عينة من درجات ٢٥ طالباً في مادة الرياضيات، وكان الوسط الحسابي للعينة ٧٢ درجة، والانحراف المعياري للعينة أيضاً ٨ درجات. فما فترة ٩٠٪ ثقة للوسط الخاص بالمجتمع؟

**الحل :**

$$\text{س} + \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}} < \text{و} < \text{س} - \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}} \quad (١٠)$$

$$\sqrt{\text{ن}} = ٥$$

$$\text{س} = ٧٢$$

$$\text{ع} = ٨$$

$$\frac{1}{2} = ٠,٥ \leftarrow ٠,٩٥ = \frac{1}{2} - ١$$

$$١,٧١١ = (٢٤١,٩٥)$$

$$\frac{\Lambda}{٥} \times ١,٧١١ - ٧٢ < \text{و} < \frac{\Lambda}{٥} \times ١,٧١١ + ٧٢$$

$$٦٩,٣ < \text{و} < ٧٤,٧$$

البرنامج التالى يقوم بتحديد الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة بمستوى ٩٠٪ للوسط الخاص بالمجتمع باستخدام المعادلة :

$$x \pm C \sqrt{\frac{V}{N}}$$

**حيث :**

X = الوسط الحسابى للعينة

C = قيمة ت المجدولة على (ن - ١) = ١,٧١١

N = حجم العينة = ن

```

10 REM      برنامج لحساب فترة الثقة
20 READ N,X,V,C
30 DATA 25,72,8,1.711
40 L=X-C*(V/SQR(N)) REM الحد الأدنى
50 H=X+C*(V/SQR(N)) REM الحد الأعلى
60 PRINT TAB(20);L; '=' الحد الأدنى
70 PRINT TAB(20);H; '=' الحد الأعلى
80 PRINT
90 END
    
```

**المخرجات**

-----

الحد الأدنى = 69.26239  
الحد الأعلى = 74.73759

### ٣ - فترة الثقة للفرق بين وسطين :

اتضح من الفصل الماضى أن توزيع الفرق بين وسطى العينتين التابعتين لتوزيعين طبيعيين يكون على النحو التالى :

$$(١١) \quad \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim \text{ط} (\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

وعليه تكون فترة الثقة هى :

$$(١٢) \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 212 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 212$$

$$(١٣) \quad \text{حيث} \quad \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 212$$

### مثال (٤، ٧) :

كان الوسط الحسابى لرواتب عينة من العاملين بإحدى المؤسسات ٦٠٠٠ ريال، بينما كان الوسط الحسابى لعينة أخرى من العاملين فى مؤسسة ثانية يساوى ٥٣٠٠ ريال. فإذا كان التباين فى المؤسسة الأولى يساوى ٢٠٠٠ وفى الثانية ١٦٠٠ فأوجد فترة ٩٥٪ ثقة للفرق بين الوسطين، إذا كان حجم العينة الأولى ٢٥ والثانية ٤٠ شخصاً.

### الحل :

$$٠,٩٥ = (١ - \alpha)$$

$$٠,٠٢٥ = \frac{\alpha}{2}$$

$$١,٩٦ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(١٢) \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 212 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 212$$

$$(١٣) \quad \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 212$$

$$\sqrt{\frac{1600}{40} + \frac{2000}{20}} =$$

$$10,954 =$$

$$5300 - 6000 = \text{سن} - \text{سن} ٢$$

$$700 =$$

$$10,954 \times 1,96 = 21,2 \frac{1}{2}$$

$$21,45 =$$

$$21,45 - 700 = \text{الحد الأدنى}$$

$$678,55 =$$

$$21,45 + 700 = \text{الحد الأعلى}$$

$$721,45 =$$

أما إذا كان التباينان مجهولين ، ولكنها متساويان ، ففترة الثقة للفرق بين الوسطين هي :

$$(14) \quad (\text{سن} - \text{سن} ٢) + \text{ت ع} ٢ \leq \mu - \mu \leq (\text{سن} - \text{سن} ٢) - \text{ت ع} ٢$$

حيث ت تعنى توزيع ت على  $(n_1 + n_2 - 2)$  درجات حرية

كما أن :

$$(15) \quad \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \left( \frac{s_1^2 (1 - \alpha/2) + s_2^2 (1 - \alpha/2)}{2(n_1 + n_2 - 2)} \right) = \text{ت ع} ٢$$

البرنامج التالى لحساب حدود الثقة للفرق بين وسطين للبيانات بالمثال (٤, ٧) السابق، علماً بأن مستوى الثقة ٩٥٪ والمعادلة المستخدمة هي :

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm B$$

حيث :

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  = الفرق بين الوسطين الحسابيين للعينتين

$$B = C \sqrt{\frac{V_1}{N_1} + \frac{V_2}{N_2}}$$

C = ١,٩٦ = القيمة الطبيعية المجدولة

V<sub>1</sub> = تباين المجتمع الأول

V<sub>2</sub> = تباين المجتمع الثانى

N<sub>1</sub> = حجم العينة الأولى

N<sub>2</sub> = حجم العينة الثانية

```

10 REM      برنامج لحساب فتره الثقة للفرق بين وسطين
20 READ N1,N2,X1,X2,V1,V2,C
30 DATA 25,40,6000,5300,2000,1600,1.96
40 A=SQR(V1/N1+V2/N2)
50 B=C*A
60 L=X1-X2-B      REM الحد الادنى
70 H=X1-X2+B      REM الحد الاعلى
80 PRINT TAB(20);L; 'الحد الادنى'
90 PRINT TAB(20);H; 'الحد الاعلى'
100 PRINT
110 END
    
```

المخرجات

678.5291 = الحد الادنى  
721.4707 = الحد الاعلى

### مثال (٥, ٧) :

افرض أن التباينين غير معلومين في المثال السابق ، وافرض أن الانحراف المعياري للعينة الأولى يساوي ١٠ ، بينما كان الانحراف المعياري للعينة الثانية ٨ . أوجد فترة ٩٥٪ ثقة للفرق بين الوسطين ، بافتراض أن التباينين متساويان في المجتمعين .

### الحل :

$$n_1 = 25$$

$$n_2 = 40$$

$$n = n_1 + n_2 = 25 + 40 = 65$$

$$t = 2,0$$

$$(15) \quad \left( \frac{1}{40} + \frac{1}{25} \right) \left( \frac{39 \times 64 + 100 \times 24}{(2 - 40 + 25)} \right) = \bar{x}_1^2$$

$$= 5,05$$

$$\bar{x}_1 = 2,25$$

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 700$$

$$2,25 \times 2 - 700 \leq \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \leq 2,25 \times 2 + 700$$

$$695,5 \leq \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \leq 704,5$$

البرنامج التالي لحساب حدود الثقة بمستوى معنوية ٩٥٪ للبيانات الواردة للفرق بين وسطين في حالة تساوي التباينين للمجتمعين مع عدم معرفتهما ، وذلك باستخدام المعادلة :

$$(X_1 - X_2) \pm B$$



حيث :

$\bar{X}_1$  = وسط العينة الأولى

$\bar{X}_2$  = وسط العينة الثانية

B = CA

C =  $\chi^2_{\alpha} = (\chi^2_{\alpha} + 1, n)$  قيمة ت المجدولة على

$$A = \left[ \frac{(N_1 - 1) V_1 + (N_2 - 1) V_2}{N_1 + N_2 - 2} \right] \left[ \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right]$$

$N_1$  = حجم العينة الأولى

$N_2$  = حجم العينة الثانية

$V_1$  = تباين العينة الأولى

$V_2$  = تباين العينة الثانية

```

10 REM برنامج لحساب حدود الثقة للفرق بين وسطين في عالم
20 REM تساوى التباينين للمجتمعين مع عدم معرفتهما
30 READ N1,N2,X1,X2,V1,V2,C
40 DATA 25,40,6000,5300,10,8,2
50 V1=V1*V1
60 V2=V2*V2
70 A=((N1-1)*V1+(N2-1)*V2)/(N1+N2-2)*(1/N1+1/N2)
80 X=ABS(X1-X2)
90 B=C*SQRT(A)
100 L=X-B REM الحد الادنى
110 H=X+B REM الحد الاعلى
120 PRINT TAB(20);L; 'الحد الادنى
130 PRINT
140 PRINT TAB(20);H; 'الحد الاعلى
150 PRINT
999 END
    
```

المخرجات

695.5049 = الحد الادنى

704.4949 = الحد الاعلى

#### ٤ - حدود الثقة للنسب :

جاء في الفصل السابق أنه إذا كانت  $\hat{C}$  تعنى نسبة أفراد العينة الذين يتميزون بصفة معينة، فإن :

$$(16) \quad \hat{C} \sim \frac{\hat{C} - C}{\sqrt{\frac{C(1-C)}{n}}} \quad \text{ط (١، ٠)}$$

حيث  $C$  هي نسبة أفراد المجتمع الذى سحبت منه تلك العينة . وبالمقارنة بحدود الثقة لوسط المجتمع تكون :

$$(17) \quad \hat{C} + 1.96 \sqrt{\frac{C(1-C)}{n}} \geq C \geq \hat{C} - 1.96 \sqrt{\frac{C(1-C)}{n}}$$

#### مثال (٧، ٦) :

أجريت دراسة لتقدير عدد الموظفين الذين يوافقون على نظام جديد للدوام الرسمى . سحبت عينة عشوائية حجمها مائة شخص من بين العدد الكلى للموظفين والبالغ ٢٦٠٠٠ موظف، فأجاب ٣٥ موظفاً بالموافقة على النظام الجديد . فما هي فترة الثقة بمستوى ٩٥٪ لنسبة الموافقين، وبكم تقدر عدد الموافقين، وما هو الحجم المناسب للعينة، حتى لا يختلف تقدير نسبة العينة عن المجتمع بأكثر من ٨٪؟

#### الحل :

$$100 = n$$

$$\frac{\text{عدد الموافقين}}{n} = \hat{C}$$

$$\therefore \hat{C} = 0.35$$

$$1 - \hat{C} = 0.65$$

$$1.96 \sqrt{\frac{C(1-C)}{n}} = 0.08$$

$$1.96 =$$

إذا فترة الثقة هي :

$$\frac{0,65 \times 0,35}{100} \sqrt{\times 1,96 - 0,35} < \bar{C} < \frac{0,65 \times 0,35}{100} \sqrt{\times 1,96 + 0,35}$$

$$0,25 \leq \bar{C} \leq 0,44$$

والعدد الكلى يتراوح بين :

$$26000 \times 0,25 \leq \text{العدد الكلى} \leq 26000 \times 0,44$$

$$65000 \leq \text{العدد الكلى} \leq 114400$$

أما حجم العينة المناسب فيمكن استخراجه من المعادلة

$$(18) \quad \frac{\bar{C}(\bar{C}-1)}{n} \sqrt{\frac{1}{\bar{C}-1}} = \bar{C}-1$$

$$(19) \quad \left( \frac{\bar{C}(\bar{C}-1)}{n} \right) \frac{1}{\bar{C}-1} = \bar{C}(\bar{C}-1)$$

ومن ثم :

$$(20) \quad \frac{\bar{C}(\bar{C}-1)}{\bar{C}(\bar{C}-1)} \frac{1}{\bar{C}-1} = n$$

$$\frac{0,65 \times 0,35}{2(0,08)} \times 2(1,96) = n$$

$$= 137 \text{ شخصاً.}$$

إذا يجب زيادة حجم العينة السابقة بسبعة وثلاثين شخصاً؛ للحصول على الدقة المطلوبة. يقترب التوزيع ذو الحدين من التوزيع الطبيعي كلما ازداد حجم العينة، إلا أنه لا يصبح التوزيع الطبيعي الأمثل إلا إذا كان حجم العينة كبيراً جداً. لذلك تختلف الحدود الدقيقة بعض الشيء عن المقدرة بالمعادلة السابقة، ولكن عرض الفترة يظل سليماً. ولكثرة استخدامات فترات الثقة في المجالات الاجتماعية، فقد دونت الحدود الدقيقة لبعض العينات. والجدول التالى يوضح تلك الحدود.

جدول (١)

فترات الثقة للنسب باستخدام ذي الحدين<sup>١</sup>.

95% CONFIDENCE INTERVAL (PER CENT) FOR BINOMIAL DISTRIBUTION (1)*												
Number Observed <i>f</i>	Size of Sample, <i>n</i>						Fraction Observed <i>f/n</i>	Size of Sample				
	10	15	20	30	50	100		250	1000			
0	0 27	0 20	0 15	0 10	0 07	0 4	0.00	0 1 0 0	0			
1	0 40	0 31	0 23	0 17	0 11	0 5	.01	0 4 0 2	0			
2	3 61	2 37	1 30	1 21	0 14	0 7	.02	1 5 1 3	1			
3	8 62	5 45	4 36	2 25	1 17	1 8	.03	1 6 2 4	1			
4	15 74	9 56	7 42	4 30	2 19	1 10	.04	2 7 3 5	2			
5	22 78	14 64	10 47	6 33	3 22	2 11	.05	3 9 4 7	3			
6	26 85	19 67	14 54	9 37	5 24	2 12	.06	3 10 5 8	4			
7	38 92	24 71	18 59	12 41	7 27	3 14	.07	4 11 6 9	5			
8	49 97	29 81	20 65	13 44	9 29	4 15	.08	5 12 6 10	6			
9	60 100	33 81	22 71	16 48	11 31	5 16	.09	6 13 7 11	7			
10	73 100	36 86	29 71	17 53	12 34	6 18	.10	7 14 8 12	8			
11		44 91	29 78	20 56	12 36	6 19	.11	7 16 9 13	9			
12		55 95	35 80	23 60	13 38	6 20	.12	8 17 10 14	10			
13		63 98	41 86	24 64	15 41	7 21	.13	9 18 11 15	11			
14		69 100	47 86	29 68	16 43	8 22	.14	10 19 12 16	12			
15		80 100	53 90	32 68	18 44	9 23	.15	10 20 13 17	13			
16			58 93	32 71	20 46	9 24	.16	11 21 14 18	14			
17			64 96	36 76	21 48	10 26	.17	12 22 15 19	15			
18			70 99	40 77	23 50	11 27	.18	13 23 16 21	16			
19			77 100	44 80	25 53	12 28	.19	14 24 17 22	17			
20			85 100	47 83	27 55	13 29	.20	15 26 18 23	18			
21				52 84	28 57	14 30	.21	16 27 19 24	19			
22				56 87	30 59	14 31	.22	17 28 19 25	20			
23				59 90	32 61	15 32	.23	18 29 20 26	21			
24				63 91	34 63	16 33	.24	19 30 21 27	22			
25				67 94	36 64	17 35	.25	20 31 22 28	23			
26				70 96	37 66	18 36	.26	21 32 23 29	24			
27				73 98	39 68	19 37	.27	22 33 24 30	25			
28				79 99	41 70	19 38	.28	23 34 25 31	26			
29				83 100	43 72	20 39	.29	24 35 26 32	27			
30				90 100	45 73	21 40	.30	25 36 27 33	28			
31					47 75	22 41	.31	26 37 28 34	29			
32					50 77	23 42	.32	27 38 29 35	30			
33					52 79	24 43	.33	28 39 30 36	31			
34					54 80	25 44	.34	29 40 31 37	32			
35					56 82	26 45	.35	30 41 32 38	33			
36					57 84	27 46	.36	31 42 33 39	34			
37					59 85	28 47	.37	32 43 34 40	35			
38					62 87	28 48	.38	33 44 35 41	36			
39					64 88	29 49	.39	34 45 36 42	37			
40					66 90	30 50	.40	35 46 37 43	38			
41					69 91	31 51	.41	36 47 38 44	39			
42					71 93	32 52	.42	37 48 39 45	40			
43					73 94	33 53	.43	38 49 40 46	41			
44					76 95	34 54	.44	39 50 41 47	42			
45					78 97	35 55	.45	40 51 42 48	43			
46					81 98	36 56	.46	41 52 43 49	44			
47					83 99	37 57	.47	42 53 44 50	45			
48					86 100	38 58	.48	43 54 45 51	46			
49					89 100	39 59	.49	44 55 46 52	47			
50					93 100	40 60	.50	45 56 47 53	48			
					†	†		††	††			

\* If *f* exceeds 50, read 100 - *f* = number observed and subtract each confidence limit from 100.  
†† If *f/n* exceeds 0.50, read 1.00 - *f/n* = fraction observed and subtract each confidence limit from 100.

(١) المصدر :

Snedecor (G. W.) and Cochran (W.G.); Statistical Methods, Iowa University Press, Iowa, U.S.A.; Seventh Printing, Sixth edition; Page (6).

تابع جدول (۱)

99% CONFIDENCE INTERVAL (PER CINT) FOR BINOMIAL DISTRIBUTION (1)\*

Number Observed <i>f</i>	Size of Sample, <i>n</i>						Fraction Observed <i>f/n</i>	Size of Sample	
	10	15	20	30	50	100		250	1000
0	0 38	0 28	0 21	0 16	0 10	0 5	0.00	0 2	0 1
1	0 52	0 38	0 30	0 21	0 14	0 7	0.01	0 5	0 2
2	1 63	1 47	0 38	0 26	0 17	0 9	0.02	1 6	1 3
3	4 71	3 54	2 43	1 31	1 20	0 10	0.03	1 7	2 4
4	9 79	5 63	4 50	2 35	1 23	1 12	0.04	2 9	3 6
5	15 82	9 68	6 58	4 39	2 26	1 13	0.05	3 11	3 7
6	21 96	17 78	12 64	8 43	4 31	2 16	0.07	3 13	5 9
7	29 99	22 83	16 71	10 51	6 33	3 17	0.08	4 14	6 10
8	37 99	27 87	20 73	12 54	7 36	3 18	0.09	5 15	7 12
9	46 100	32 91	20 80	15 57	8 38	4 19	0.10	6 16	8 13
10	62 100	37 95	27 80	15 62	10 40	4 20	0.11	6 17	9 14
11		46 97	29 84	19 66	11 43	5 21	0.12	7 18	9 14
12		53 99	36 88	20 68	12 45	6 23	0.13	8 19	10 16
13		62 100	39 91	24 70	14 47	6 24	0.14	9 20	11 17
14		72 100	42 94	25 74	15 49	7 26	0.15	9 22	12 18
15			50 96	30 76	17 51	8 27	0.16	10 23	13 19
16			57 98	32 80	18 53	9 29	0.17	11 24	14 20
17			62 100	34 81	20 55	9 30	0.18	12 25	15 21
18			70 100	38 85	21 57	10 31	0.19	13 26	16 22
19			79 100	43 85	23 59	11 32	0.20	14 27	17 23
20				46 88	24 61	12 33	0.21	15 28	18 24
21				49 90	26 63	12 34	0.22	16 30	19 26
22				53 92	28 65	13 35	0.23	17 31	20 27
23				57 94	29 67	14 36	0.24	18 32	21 28
24				61 96	31 69	15 38	0.25	18 33	22 29
25				65 98	33 71	16 39	0.26	19 34	22 30
26				69 99	35 72	16 40	0.27	20 35	23 31
27				74 100	37 74	17 41	0.28	21 36	24 32
28				79 100	39 76	18 42	0.29	22 37	25 33
29				84 100	41 77	19 43	0.30	23 38	26 34
30					43 79	20 44	0.31	24 39	27 35
31					45 80	21 45	0.32	25 40	28 36
32					47 82	21 46	0.33	26 41	29 37
33					49 83	22 47	0.34	26 42	30 38
34					51 85	23 48	0.35	27 43	31 39
35					53 85	24 49	0.36	28 44	32 40
36					55 88	25 50	0.37	29 45	33 41
37					57 89	26 51	0.38	30 46	34 42
38					60 90	27 52	0.39	31 47	35 43
39					62 92	28 53	0.40	32 48	36 44
40					64 93	29 54	0.41	33 50	37 45
41					66 94	29 55	0.42	34 51	38 46
42					69 96	30 56	0.43	35 52	39 47
43					71 97	31 57	0.44	36 53	40 48
44					74 98	32 58	0.45	37 54	41 49
45					77 99	33 59	0.46	38 55	42 50
46					80 99	34 60	0.47	39 55	43 51
47					83 100	35 61	0.48	40 56	44 52
48					86 100	36 62	0.49	41 57	45 53
49					90 100	37 63	0.50	42 58	46 54

\* If *f* exceeds 50, read 100 - *f* = number observed and subtract each confidence limit from 100

†† If *f/n* exceeds 0.50, read 1.00 - *f/n* = fraction observed and subtract each confidence limit from 100

## ٥ - فترات الثقة للتباينات :

بما أن :

$$(٢١) \quad \frac{\chi^2_{(1-\alpha)} \cdot \sigma^2}{n} \sim \chi^2_{(1-\alpha)}$$

وبما أن توزيع مربع كاي ( $\chi^2$ ) غير متشابه، ففترة الثقة بمستوى  $(1 - \alpha)\%$  هي :

$$(٢٢) \quad \frac{\chi^2_{(1-\alpha)} \cdot \sigma^2}{n} \leq \frac{\chi^2_{(1-\alpha)} \cdot \sigma^2}{n}$$

$$(٢٣) \quad \frac{\chi^2_{(1-\alpha)} \cdot \sigma^2}{n} < \chi^2_{(1-\alpha)} < \frac{\chi^2_{(1-\alpha)} \cdot \sigma^2}{n}$$

مثال (٧، ٧) :

أخذت عينة عشوائية حجمها ١٢ من مجتمع طبيعي، فوجد أن تباينها يساوي ٥٣. أوجد فترة ٩٥٪ ثقة للتباين.

$$\text{الحل :} \quad 1 - \alpha = 0,95$$

$$\therefore \quad \alpha = 0,05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$n = 12$$

$$n - 1 = 11$$

$$\frac{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}{2} = \chi^2_{(1-\alpha/2)} \text{ على } 11 \text{ درجة حرية.}$$

$$= 21,9$$

$$\chi^2_{(1-\alpha/2)} \text{ على } 11 \text{ درجة حرية} = 3,82$$

∴ فترة الثقة هي :

$$(٢٣) \quad \frac{53 \times 11}{21,9} < \chi^2_{(1-\alpha/2)} < \frac{53 \times 11}{3,82}$$

$$26,62 < \chi^2_{(1-\alpha/2)} < 152,62$$

## تمارين

- ١ - عرف فترة الثقة، واستخداماتها، والفرق بينها، وبين حدود الثقة.
- ٢ - ما هو الفرق بين فترة الثقة واختبار الفرضية؟ وهل يجوز أن تكون فترة الثقة بديلاً لاختبار الفرضية في حالة خاصة؟
- ٣ - ترغب إحدى المؤسسات في شراء مصابيح كهربائية من نوع خاص، فعرضت عليها ثلاث شركات أنواعاً مختلفة من تلك المصابيح. وباختيار عينة عشوائية حجمها مائة مصباح من كل نوع اتضح أن الوسط الحسابي لعدد أيام الإضاءة المستمرة لعينة كل نوع، وتباين المجتمع على النحو الآتي :
  - الوسط للنوع الأول ٤٣، ٤ يوماً، والتباين ٨١، ٣٤ للمجتمع الأول.
  - الوسط للنوع الثاني ٥١، ٣ يوماً، والتباين ٢٤، ٤٦ للمجتمع الثاني.
  - الوسط للنوع الثالث ٤٤، ٧ يوماً، والتباين ٢٩، ٥٣ للمجتمع الثالث.
 استخدم ٩٥٪ فترة ثقة لوسط كل نوع، وحدد أى الأنواع أفضل.
- ٤ - استخدم البيانات الخاصة بالسؤال الثالث لإيجاد فترة ٩٥٪ ثقة للفرق بين الوسطين لكل عيتين، ومن ثم قرر ما إذا كان هناك نوعان متساويان أم لا.
- ٥ - افرض أن حجم العينة للنوع الأول في السؤال الثالث ١٥، وللنوع الثاني ٢٠، وللنوع الثالث ١٢، فأوجد فترة ٩٥٪ ثقة للفرق بين كل وسطين، إذا علمت أن التجارب السابقة قد دلت على أن التباين لا يختلف بين المجتمعات الثلاثة، بينما كانت الانحرافات المعيارية للعينات ٦ و ٨ و ٧ على التوالي.
- ٦ - أوجد فترة ٩٥٪ ثقة لأوساط المصابيح الثلاثة الواردة في السؤال الخامس.
- ٧ - أوجد فترة ٩٥٪ ثقة للفرق بين كل وسطين في السؤال الخامس، إذا لم تكن هناك أى معلومات متوفرة حول تباين المجتمع لكل نوع.

- ٨ - تعاطى ١٠ مرضى بالسرطان، اختيروا كعينة عشوائية، دواءً جديداً يساعد على زيادة عدد ساعات النوم، فكانت الزيادات في أحد الأيام على النحو الآتى :
- ٢,٥ ، ٣,٥ ، ٣,٣ ، ٦,١ ، ٢,١ ، ١,٦ ، ٠,٨ ، ٠,٧ ، ٤,١ ، ٤,٠ ، ٠,٤ ، ٠,٥ ، ٢,٥
- فأوجد فترة ٩٠٪ ثقة لوسط المجتمع .
- ٩ - أوجد فترة ٩٩٪ ثقة للمجتمع إذا دلت التجارب السابقة على أن تباين المجتمع ٢٥ ، ٦ .
- ١٠ - أوجد حجم العينة المناسب الذى يمكن أن يستخدم بمستوى ٩٥٪ ثقة، لتقدير الوسط للعدد اليومي للمعاملات في حدود  $\pm 4$  معاملات، إذا علمت أن الانحراف المعياري للعدد اليومي للمعاملات يساوى ١٥ معاملة .
- ١١ - افرض أن الانحراف المعياري للمجتمع في المثال السابق لم يكن معلوماً، ولكن باختيار عينة من معاملات ١٠ أيام اتضح أن الانحراف المعياري لتلك العينة يساوى ١٢، فما الحجم المناسب للعينة؟
- ١٢ - اختيرت عينة عشوائية قوامها ٧٥ وحدة من إنتاج أحد المصانع للفحص، فاتضح أن ١٤ وحدة كانت تالفة . أوجد فترة ٩٥٪ فترة ثقة لنسبة الوحدات التالفة، وبكم تقدر عدد الوحدات التالفة يومياً، إذا كان إنتاج المصنع ١٠٠٠٠ وحدة في اليوم .
- ١٣ - ما هو الحجم المناسب للعينة في السؤال السابق، إذا كان الهدف هو تقدير نسبة التالف بنسبة تختلف ٥٪ على الأكثر من نسبة المجتمع .
- ١٤ - أوجد فترة ٩٠٪ ثقة لتباين مجتمع طبيعى، إذا علمت أن تباين عينة عشوائية قوامها ٢٤ يساوى ٦٠ .
- ١٥ - استخدم بيانات السؤال الثالث واكتب برنامجاً بلغة بيسك لتحديد الحد الأدنى والحد الأعلى للثقة .



---

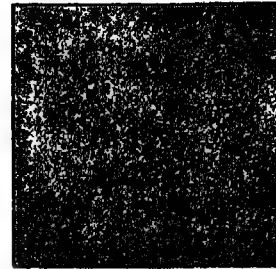
## **تطبيقات اختبارات الفرضيات** **(Hypothesis Testing)**

---

**الفصل**  
**الثامن**



## تطبيقات اختبارات الفرضيات (Hypothesis Testing)



### ١ - تعريف الفرضية والاختبار :

الفرضيات كلمة جمع ، مفردها فرضية ، والفرضية هي بيان يتعلق بالتوزيع الإحصائي للمتغير العشوائي ؛ لذلك تنقسم الفرضيات إلى نوعين هما :

١ - فرضية تتعلق بمعلم واحد ، أو أكثر من معالم (Parameters) التوزيع ، الذي يفترض أنه معلوم . فقد تكون الفرضية مثلاً خاصة بنسبة معينة لقيم تتبع التوزيع ذا الحدين ، أو قد تكون خاصة بالوسط أو الفرق بين وسطين لقيم تتبع التوزيع الطبيعي على سبيل المثال أيضاً . . . وهكذا .

٢ - فرضية تتعلق بالتوزيع الإحصائي نفسه مثل تبعية متغير عشوائي لتوزيع معين . هذا وسيعرض هنا النوع الأول فقط لكثرة استخداماته في المجالات التطبيقية . لذلك فسوف يفترض أن التوزيع الإحصائي للقيم معلوم ، لتصبح الفرضية معتمدة على القيم العينية في اتخاذ القرار الخاص بقبول أو رفض بيان أو عدة بيانات تتعلق ببعض معالم ذلك التوزيع .

تسمى الفرضية بالفرضية البسيطة (Simple Hypothesis) إذا حددت قيمة معينة للمعلم ، وتسمى مزدوجة (Composite Hypothesis) إذا كانت بخلاف ذلك .

### مثال (١، ٨) :

- س متغير عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً بتباين  $\sigma^2 = 10$  .
- (أ) الفرضية القائلة بأن الوسط  $\mu = 20$  هي فرضية بسيطة .
- (ب) الفرضية القائلة بأن الوسط  $\mu > 20$  هي فرضية مزدوجة .
- (ج) الفرضية القائلة بأن الوسط ينحصر في الفترة من ١٥ إلى ٢٠ هي فرضية مزدوجة أيضاً .

أما اختبار الفرضية فهو عبارة عن تقسيم فضاء العينة الذى يحوى كل النتائج المتوقعة إلى قسمين منفصلين، الأول : يتكون من جميع النتائج التى تدعو لقبول الفرضية، والثانى : يتكون من جميع النتائج الداعية لرفض تلك الفرضية .

لذا فاختبار الفرضية هو أسلوب لاتخاذ أحد قرارين : إما القبول أو الرفض، بناء على تقسيم فضاء العينة إلى منطقتين غير متداخلتين، أولاهما تسمى منطقة القبول (Acceptance Region)، والثانية تسمى منطقة الرفض (Rejection Region) أو المنطقة الحرجة (Critical Region) .

بيد أن اتخاذ القرار يتم تحت ظروف عدم التأكد، وهذا يعنى أن هناك احتمالاً برفض الفرضية الصحيحة، أو قبول الفرضية الخاطئة، بمعنى أن هناك أربعة قرارات لا بد من أن يتخذ واحد منها، وهى :

- ١ - قبول الفرضية عندما كان يجب أن تقبل، وهو قرار صحيح .
- ٢ - رفض الفرضية عندما كان يجب أن تقبل، وهو قرار خاطئ .
- ٣ - قبول الفرضية عندما كان يجب أن ترفض، وهو قرار خاطئ .
- ٤ - رفض الفرضية عندما كان يجب أن ترفض، وهو قرار صحيح .

ومن الواضح أن النوع الأول والثانى يمثلان مجموعة قرارات تنفصل تماماً عن الثالث والرابع، وهذا دليل على أن اختبار الفرضيات هو أسلوب لاتخاذ قرارين : أحدهما صحيح، مثل الأول أو الرابع، والثانى : خاطئ مثل القرار الثانى والثالث. ويقال إن هناك خطأ من النوع الأول (Type I error)، إذا رفضت الفرضية عندما كانت صحيحة. أما إذا قبلت الفرضية الخاطئة فيسمى الخطأ من النوع الثانى (Type II error). والجداول التالى يبين أنواع القرارات والأخطاء، علماً بأن :

أ = احتمال ارتكاب خطأ من النوع الأول .

ب = احتمال ارتكاب خطأ من النوع الثانى .

وعليه يصبح احتمال اتخاذ القرار الأول والخاص بقبول الفرضية عندما كان يجب أن تقبل يساوى (١ - أ). أما احتمال اتخاذ القرار الخاص برفض الفرضية عندما كان يجب أن ترفض (الرابع) فيساوى (١ - ب) .

## جدول (١)

### أنواع القرارات واحتمالاتها

أنواع الفرضيات		القرار
الفرضية خاطئة	الفرضية صحيحة	
خطأ من النوع الثانى (ب)	قرار سليم (١ - أ) مستوى الثقة	قبول الفرضية
قرار سليم (١ - ب) (قوة الاختبار)	خطأ من النوع الأول (أ) (مستوى المعنوية)	رفض الفرضية

يعتبر الخطأ من النوع الأول أكثر خطراً من النوع الثانى ، لذلك تسمى (أ) بكمية المخاطرة التى يجب أن توضع فى الاعتبار عند صياغة أى فرضية .

### مثال (٢ ، ٨) :

أنتجت شركة للأدوية دواءً جديداً ، ولا بد من التأكد من أن الدواء ليست له أعراض جانبية تؤذى الإنسان .  
إذاً هناك نوعان من الفرضيات :

الفرضية الأولى : الدواء غير مؤذٍ .

الفرضية الثانية : الدواء مؤذٍ .

فأى الفرضيتين يجب أن تختار؟

### الحل :

لنفرض أن الاختيار وقع على الفرضية الأولى ، فالمخاطرة تأتى هنا (خطأ النوع الأول) إذا رفضت الفرضية وهى صحيحة ، أى إذا اعتبر الدواء مؤذياً فى حين أنه غير مؤذٍ .  
أما إذا كانت الفرضية هى الثانية فالخطأ الأول هو رفضها وهى صحيحة ، أى اعتبار الدواء غير مؤذٍ فى حين أنه مؤذٍ .

وبما أن اعتبار الدواء غير مؤذٍ في حين أنه مؤذٍ، أكثر خطراً من اعتبار الدواء مؤذياً في حين أنه غير مؤذٍ، فالفرضية الثانية هي الصحيحة في هذه الحالة .

وبما أن احتمال الخطأ من النوع الأول (أ) يتناقص كلما ضعفت كمية المخاطرة التي ينطوى عليها القرار الخاص بقبول الفرضية الصحيحة، فإن أ تسمى مستوى المعنوية (Level of Significance) . وأما احتمال قبول الفرضية الصحيحة (١ - أ) فيسمى مستوى الثقة (Level of Confidence) ، بينما يسمى الاحتمال الثاني (١ - ب) للقرار السليم، والخاص برفض الفرضية عندما كان يجب أن ترفض، بقوة الاختبار (Power of Test) .

يعتمد اختبار الفرضية على ثلاث قيم، هي : أ، وب، وحجم العينة (ن) . وبالرغم من أنه لا يمكن ارتكاب الخطأين في اختبار واحد، فإن الثلاث قيم مترابطة فيما بينها، إلى حد يجعل في الإمكان استخراج القيمة الثالثة من أى قيمتين . ولعل القرار الأمثل هو الذى تكون عنده  $\alpha = \beta = \text{صفر}$  .

إلا أن ذلك ليس ممكناً ما دام اتخاذ القرار يتم تحت ظروف عدم التأكد؛ لذلك يهدف اختبار الفرضية إلى اختيار الاختبار المناسب الذى يؤدي إلى إضعاف قيمة (ب)، بعد تحديد احتمال المخاطرة الذى يجعل مستوى المعنوية (أ) في أدنى درجة ممكنة، وبمعنى آخر : اختبار الفرضيات هو أسلوب لرفع قوة الاختبار إلى أعلى درجة ممكنة مع أدنى درجة من مستوى المعنوية . هذا، وتعتبر أكثر المستويات المعنوية استخداماً هي ١٪ و ٥٪ و ١٠٪، وعليه فالفرضية دائماً صحيحة ما لم يثبت خلاف ذلك .

تسمى الفرضية في جميع الحالات السابقة بفرضية العدم (ف) . - Null Hypothesis(Ho)  
- فإذا ثبت أن فرضية العدم (ف) غير صحيحة فلا بد من فرضية بديلة (ف١) -  
(Alternative Hypothesis(H1)) - فالفرضية البديلة (ف١) هي عبارة عن بيان لمنطقة الرفض، ولا يتم اختبارها في نفس الدراسة مع أنها تستخدم لاختبار فرضية العدم .

وتنقسم الفرضيات البديلة إلى قسمين، القسم الأول : هو الفرضية البديلة بطرف واحد (One - tailed Test) وهنا تكون الفرضية البديلة إما أكبر أو أصغر من مقدار معين، فهي ذات اتجاه واحد . أما القسم الثانى : فهو الفرضية البديلة ذات الطرفين (Two - tailed Test) ، إذ تكون ف١ ذات اتجاهين، الأول هو أكبر، والثانى أصغر من القيمة المحددة

**مثال (٣، ٨) :**

إذا كانت

$$F = \frac{1}{2}$$

فحدد أنواع الفرضيات البديلة التالية .

$$(أ) F_1 < \frac{1}{2}$$

$$(ب) F_1 > \frac{1}{2}$$

$$(ج) F_1 \neq \frac{1}{2}$$

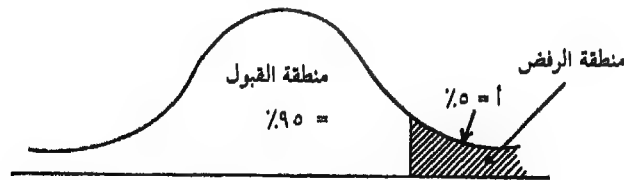
**الحل :**

(أ)  $F_1 < \frac{1}{2}$  هي فرضية ذات طرف واحد وهو الطرف الأعلى .

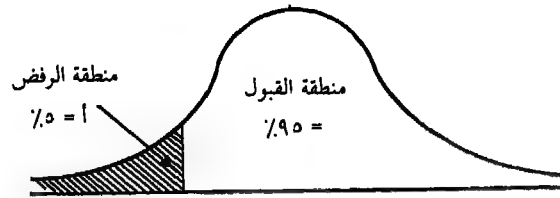
(ب)  $F_1 > \frac{1}{2}$  هي فرضية ذات طرف واحد وهو الطرف الأدنى .

(ج)  $F_1 \neq \frac{1}{2}$  فرضية بديلة ذات طرفين .

يعتبر تحديد نوع الفرضية البديلة من الأسس التي يركز عليها أسلوب اختبار الفرضيات، إذ يكون مستوى المعنوية في اتجاه واحد، إذا كانت الفرضية ذات اتجاه واحد، وينقسم إلى قسمين متساويين إذا كانت الفرضية البديلة ذات اتجاهين. والأشكال التالية توضح بعض الأمثلة عند اختبار الفرضية لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي، وبمستوى معنوية يساوي ٥٪. ويلاحظ أن منطقة القبول تساوي ٩٥٪ في جميع الحالات.



**شكل (١) :** اختبار فرضية ذات طرف أعلى



شكل رقم (٢) : اختبار فرضية ذات طرف أدنى

## ٢ = القرار :

يعتمد القرار الخاص بقبول أو رفض فرضية العدم على ثلاث قيم ، وهى :

(أ) مستوى المعنوية (α) ، أو مستوى الثقة (1 - α) :

إذ تعزى الاختلافات الواردة بين القيم إلى الصدفة (Chance) في حالة قبول فرضية العدم .

(ب) إحصائية الاختبار (Test Statistic) :

وهى القيمة المحسوبة بناء على توزيع الإحصائية ، فلكل إحصائية توزيع ، وهى قيمة محسوبة من القيم العينية وتستخدم في ذات الوقت القيمة المحددة بفرضية العدم . فإحصائية اختبار الوسط في التوزيع الطبيعي هى  $z$  . حيث :

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (1)$$

(ج) القيمة الحرجة (Critical Value) :

وهى القيمة المستخرجة من جداول التوزيعات الإحصائية ؛ ولذلك تسمى أيضاً بالقيمة المجدولة (Tabulated Value) . وتستخرج القيمة المجدولة من جداول التوزيع الطبيعي إذا كانت إحصائية الاختبار على التوزيع الطبيعي بينما تستخرج القيمة الحرجة من توزيع  $t$  أو  $F$  أو مربع كاي ، وبالعدد المحدد لدرجات الحرية اعتماداً على توزيع إحصائية الاختبار ومستوى المعنوية .

تتساوى إحصائية الاختبار بالقيمة الحرجة عند الحد الفاصل بين منطقتي القبول والرفض ؛ لذلك تقبل فرضية العدم إذا كانت القيمة المطلقة لإحصائية الاختبار أكبر من القيمة الحرجة (المجدولة) . أى إذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من المجدولة في حالة الاختبار من الطرف الأعلى ، أو أقل منها في حالة الاختبار من الطرف الأدنى . وهذا يعنى أن فرضية العدم مقبولة



ما دامت القيمة المحسوبة واقعة ضمن فترة الثقة بمستوى معنوية محدد. هذا، وتظل فرضية العدم مقبولة إلا إذا ثبت خلاف ذلك.

**مثال (٤، ٨):**

إذا كانت  $\bar{x}$  هي الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها (ن) من مجتمع ذي توزيع طبيعي وسطه (و) وانحرافه المعياري (م). وإذا كانت  $\bar{y}$  قيمة محددة ومعلومة فأوجد القيم الحرجة، وإحصائية الاختبار المرافقة لكل من الفرضيات البديلة التالية، ووضح كيفية اتخاذ القرار بمستوى معنوية يساوي (أ) إذا كانت فرضية العدم هي :

$$f. : \bar{y} = \bar{y}_0$$

والفرضيات البديلة هي :

$$(أ) f. : \bar{y} \neq \bar{y}_0$$

$$(ب) f. : \bar{y} < \bar{y}_0$$

$$(ج) f. : \bar{y} > \bar{y}_0$$

**الحل :**

f. :  $\bar{y} = \bar{y}_0$  وتعني أن وسط المجتمع الذي سحبت منه العينة يساوي مقداراً محدداً هو  $\bar{y}_0$ . وقد تكتب نفس الفرضية على النحو التالي :

$$f. : \bar{y} - \bar{y}_0 = 0$$

إحصائية الاختبار في جميع الحالات هي :

$$t = \frac{\bar{y} - \bar{y}_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

(أ) ترفض فرضية العدم (f.) إذا كانت :

$$|t| > t_{\alpha/2, n-1}$$

أى أن فرضية العدم مرفوضة في حالتين هما :

$$Y < 1 - \frac{1}{4} \quad \text{إذا كانت } Y < \text{صفر}$$

$$Y > 1 - \frac{1}{4} \quad \text{إذا كانت } Y > \text{صفر}$$

حيث  $1 - \frac{1}{4}$  هي القيمة الحرجة (المجدولة) بمستوى معنوية  $\frac{1}{4}$  لأن فرضية العدم ذات اتجاهين.

(ب) ف : و < و

إذا ترفض فرضية العدم إذا كانت

$$Y < 1 - \frac{1}{4}$$

لأن الفرضية ذات طرف واحد وهو الطرف الأعلى .

(ج) ف : و > و

ترفض فرضية العدم إذا كانت

$$Y > 1 - \frac{1}{4}$$

لأن الفرضية ذات طرف أدنى فقط .

### ٣ - اختبارات الوسط الحسابى لعينة واحدة :

(أ) عندما يكون تباين المجتمع الذى سميت منه العينة معلوماً :

إذا كانت و قيمة محددة لوسط المجتمع ، بينما كانت س هي الوسط الحسابى لعينة حجمها (ن) اختيرت عشوائياً من مجتمع طبيعى ، أثبتت التجارب السابقة أن وسطه يساوى (و) وانحرافه المعياري م . فإحصائية الاختبار هي :

$$Y = \frac{S - \mu}{\sqrt{\frac{M}{N}}}$$

### مثال (٥، ٨):

اختبرت عينة عشوائية قوامها ٢٥ خريجاً من أحد برامج النسخ، اتضح بعد اختبار أفراد العينة أن الوسط الحسابي لعدد الكلمات الصحيحة يساوى ٣١ كلمة في الدقيقة الواحدة. ولقد دلت التجربة على أن الوسط الخرجي هذا البرنامج هو ٢٩ كلمة بانحراف معياري يساوى ٤. فهل هناك دليل كافٍ بدرجة ثقة ٩٥٪، على أن هناك تحسناً في مستوى خريجي هذا البرنامج؟

### الحل :

$$ف : و = ٢٩$$

$$ف : و < ٢٩$$

$$أ = ٥\%$$

$$\therefore ١ - \alpha = ١ - ٠,٠٥ = ٠,٩٥ \text{ من جدول التوزيع الطبيعي بالملحق.}$$

$$و = ٢٩$$

$$م = ٤$$

$$ن = ٢٥$$

$$س = ٣١$$

إذا إحصائية الاختبار

$$ي = \frac{س - و}{\sqrt{\frac{م}{ن}}}$$

$$= \frac{٢٩ - ٣١}{\sqrt{\frac{٤}{٢٥}}}$$

$$= ٢,٥$$

وبما أن القيمة المحسوبة (٢,٥) أكبر من المجدولة (١,٦٤) فالفرق بين الوسطين فرق جوهري (معنوياً) بدرجة ثقة ٩٥٪. لذلك لا يمكن قبول فرضية العدم، بمعنى أن هذا دليل على أن هناك ارتفاعاً في مستوى خريجي هذا البرنامج.

**مثال (٨,٦) :**

هل يمكن اعتبار وسط العينة لا يختلف عن وسط المجتمع في المثال السابق؟

**الحل :**

$$ف : و = ٢٩$$

$$ف : و \neq ٢٩$$

$$ي = ٢,٥$$

إلا أن الفرضية البديلة ذات اتجاهين ؛ إذاً

$$أ = ٥\%$$

$$\frac{١}{٢} = ٥٠\%$$

$$١ - ١ - ٥٠\% = ٥٠\%$$

$$= ١,٩٦$$

وبما أن

$$١ - ١ - ٥٠\% < ٥٠\%$$

فالفرق بين الوسطين فرق جوهري أيضاً لا يمكن أن يعزى للصدفة (Chance) ؛ لذلك لا يمكن قبول فرضية العدم .

**(ب) عندما يكون تباين المجتمع الذي سميت منه العينة مجهولاً ولكن حجم العينة كبير :**

يعتبر الحجم الكبير للعينة مبرراً لاستبدال التباين المجهول للمجتمع (م<sup>٢</sup>) بتباين العينة (ع<sup>٢</sup>) . وفيما عدا ذلك تظل بقية قيم الاختبار كما كانت عليه في الحالة السابقة ، بمعنى أن :

$$(٢) \quad \frac{\frac{س - و}{ع}}{\sqrt{ن}} = ي$$

### مثال (٨, ٢) :

تم اختيار عينة عشوائية حجمها ٦٤ من خريجي برنامج للنسخ الإعدادي، فكان الوسط الحسابي لعدد الكلمات الصحيحة في الدقيقة الواحدة ٣١ كلمة بتباين قدره ١٦، ولقد دلت التجارب السابقة على أن الوسط لخريجي مثل هذا البرنامج هو ٢٩ كلمة. فهل هناك زيادة جوهرية بمستوى معنوية ٥٪ في عدد الكلمات الصحيحة بالنسبة لخريجي هذا البرنامج؟

### الحل :

$$ف : و = ٢٩$$

$$ف : و < ٢٩$$

$$٠,٠٥ = \alpha$$

$$٠,٩٥ = ١ - \alpha$$

∴ القيمة الحرجة هي (من جدول التوزيع الطبيعي بالملحق) :

$$١,٦٤ = ٠,٩٥$$

$$٦٤ = ن$$

$$١٦ = ع$$

$$٣١ = س$$

إحصائية الاختبار هي :

(٢)

$$٢ - س = \frac{ع}{ن}$$

$$٢٩ - ٣١ = \frac{ع}{٨}$$

$$٤ =$$

$$٠,٩٥ < ٤$$

فالفرق جوهري، ولا يمكن قبول فرضية العدم الفائلة بأنه لا يوجد فرق بين هذا البرنامج وبقية البرامج السابقة. وربما يلاحظ هنا أن إحصائية الاختبار تتزايد بتزايد حجم العينة إذا لم تتغير بقية الإحصائيات.

### (ج) إذا كان حجم العينة صغيراً وتباين المجتمع مجهولاً :

إذا كان المجتمع الذى سحبت منه العينة طبيعياً، وكان حجم العينة صغيراً بدرجة لا تبرر استبدال تباين المجتمع بتباينها، فتوزيع إحصائية الاختبار هو توزيع تاء على (ن - ١) درجات حرية، بدلاً من التوزيع الطبيعي حسب ما جاء في الفصل الخاص بالتوزيعات. بمعنى أن إحصائية الاختبار هي :

$$ت = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (٣) \quad \text{وذلك على (ن - ١) درجات حرية.}$$

أما القيمة الحرجة (المجدولة) فتستخرج من جدول توزيع تاء بالملحق حسب مستوى المعنوية ودرجات الحرية.

### مثال (٨، ٨) :

اختيرت عينة قوامها ١٦ خريجاً من أحد برامج النسخ، وكان الوسط الحسابي لعدد الكلمات الصحيحة في الدقيقة الواحدة ٣١ كلمة بانحراف معياري ٦. هل يمكن اعتبار هذا الفرق جوهرياً بمستوى معنوية ٥٪ مقارنة بالوسط لخريجي هذا البرنامج الذى أثبتت التجربة أنه يساوى ٢٩ ؟

### الحل :

$$ف : و = ٢٩$$

$$ف١ : و < ٢٩$$

$$\alpha = ٠,٠٥$$

$$\alpha - ١ = ٠,٩٥$$

القيمة الحرجة من جدول توزيع تاء على ١٥ درجة حرية هي :

$$1,746 = 0.95$$

$$16 = n$$

$$4 = \sqrt{n}$$

$$6 = c$$

$$31 = s$$

إحصائية الاختبار هي :

(3)

$$t = \frac{s - \mu}{\frac{c}{\sqrt{n}}}$$

$$\frac{29 - 31}{\frac{6}{4}} =$$

$$1,333 =$$

إذا فالفرق ظاهرى، وليس جوهرياً؛ لأن القيمة المحسوبة أقل من الجدولة، بمعنى أنه يجب قبول فرضية العدم بمستوى ثقة ٩٥٪.

#### ٤ = اختبارات الفرق بين وسطين من عينتين مستقلتين :

هناك حالات كثيرة في المجالات التطبيقية التي تستدعى اختبار الفرق بين وسطى مجتمعين، اعتماداً على القيم المستخرجة من عينتين مستقلتين، فإذا كانت  $\mu_1$  تمثل وسط المجتمع الأول، وكانت  $\mu_2$  تمثل وسط المجتمع الثانى، فهناك عدد من الفرضيات التي تكون واحدة منها مجالاً للاختبار، فقد تكون فرضية العدم هي :

$$\mu_1 = \mu_2$$

أو بمعنى آخر أن الوسطين متساويان، أو الفرق بينهما ليس جوهرياً، بمعنى أن :

$$\mu_1 - \mu_2 = \text{صفرًا}$$

وتكون فرضية العدم هنا إما على النحو الآتى :

$$f_1 : f_2 < 0$$

أو :

$$f_1 : f_2 > 0$$

أو بمعنى آخر :

$$f_1 - f_2 < \text{صفر}$$

أو :

$$f_1 - f_2 > \text{صفر}$$

وفى جميع هذه الحالات تكون على طرف واحد، وتعنى أن هناك وسطاً أكبر من الآخر.

كذلك قد تكون الفرضية البديلة على النحو التالى :

$$f_1 : f_2 \neq 0$$

وهى فرضية ذات طرفين تعنى أن هناك فرقاً جوهرياً بين الوسطين.

أما إذا كان الفرق المحدد بفرضية العدم غير الصفر - يساوى ل مثلاً حيث ل قيمة معلومة -  
بمعنى أن :

$$f_1 : f_2 - 0 = L \text{ وهى فرضية عدم بسيطة.}$$

أو كانت مزدوجة على النحو الآتى :

$$f_1 : f_2 - 0 < L$$

فقد تكون الفرضية البديلة على النحو الآتى :

$$f_1 : f_2 - 0 < L$$

أو

$$f_1 : f_2 - 0 > L$$

أو

$$f_1 : f_2 - 0 \neq L$$



واعتماداً على توزيع الفرق بين وسطين، فأحصائية الاختبار هي :

$$(٤) \quad Y = \frac{(س_١ - س_٢) - L}{\sqrt{\frac{٢٢}{٢٠} + \frac{٢٢}{١٠}}}$$

ولا تستخدم المعادلة السابقة إلا إذا كان تباين المجتمع الذي سحبت منه العينة الأولى (١١م) معلوماً، وكذلك تباين المجتمع الثاني (٢م).

هذا، وتبقى القيمة الحرجة (المجدولة) على ما كانت عليه اعتماداً على مستوى المعنوية. أما إذا كان التباين مجهولاً، فيجوز استبدال تباين كل مجتمع بتباين عينته (١٢ع)، إذا كان حجم العينة كبيراً. بمعنى أن :

$$(٤) \quad Y = \frac{(س - س_٢) - L}{\sqrt{\frac{٢٤}{٢٠} + \frac{٢٤}{١٠}}}$$

#### مثال (٨، ٩) :

أجرى بحث لتقويم طريقتين في التدريب على النسخ، واختيرت عيتان عشوائيتان من المتدربين على كل طريقة. اتضح أن الوسط الحسابي لعدد الكلمات الصحيحة في الدقيقة الواحدة يساوى ٣٠، و ٣٢ في المجموعة الأولى والثانية على التوالي. فإذا كان حجم الأولى ٤٥، والثانية ٣٦ متدرباً، بينما كان التباين لعينة المتدربين بالطريقة الأولى يساوى ٨١، وللمتدربين بالطريقة الثانية يساوى ١٤٤، فهل هناك فرق جوهري بمستوى معنوية ١٠٪ بين الطريقتين؟

#### الحل :

ف :  $١ = ٢$  أى أن الفرق بين الطريقتين ليس جوهرياً. أو بمعنى آخر :  
ف :  $١ - ٢ = ٠$  صفراً

ف<sub>١</sub> : ف<sub>٢</sub> ≠ ١ : ١ وهي فرضية بديلة ذات طرفين .

$$٠,١٠ = ١$$

$$٠,١٥ = \frac{1}{٢}$$

$$٠,١٥ = \frac{1}{٣}$$

إذا القيمة الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي

$$١,٦٤ = ٠,١٥$$

إحصائية الاختبار هي :

$$(٤) \quad \frac{(س_١ - س_٢) - ل}{\sqrt{\frac{٢ع}{٢ن} + \frac{٢ع}{١٥}}} = ١$$

وذلك لأن حجم العينة كبير.

$$٣٠ = س_١$$

$$٣٢ = س_٢$$

ل = صفراً من فرضية العدم .

$$٤٥ = ن_١$$

$$٣٦ = ن_٢$$

$$٨١ = ٢ع_١$$

$$١٤٤ = ٢ع_٢$$

$$\frac{٣٢ - ٣٠}{\sqrt{\frac{١٤٤}{٣٦} + \frac{٨١}{٤٥}}} = ٠,٨٣$$

$$٠,٨٣ < ١,٦٤$$

وبما أن ٠,٨٣ < ١,٦٤ فإن الفرق بين الطريقتين ظاهرى وليس جوهرياً، بمعنى أنه لا يمكن رفض فرضية العدم القائلة بأنه لا يوجد فرق بين الطريقتين .

البرنامج التالى يحسب إحصائية الاختبار للفرق بين وسطين حسب ما هو وارد بالمثال (٨، ٩) حيث:

N1	حجم العينة الأولى.
N2	حجم العينة الثانية.
X1	الوسيط الحسابى للعينة الأولى.
X2	الوسيط الحسابى للعينة الثانية.
V1	التباين للعينة الأولى.
V2	التباين للعينة الثانية.
L	الفرق بين الوسطين، وفي هذه الحالة فهو صفر نسبة لافتراض أنه لا يوجد فرق.

```

10 REM      برنامج لاختبار الفرق بين وسطين
20 READ N1,N2,X1,X2,V1,V2,L
30 DATA 45,36,30,32,81,144,0
40 Y=(X1-X2-L)/SOR(V1/N1+V2/N2)
50 PRINT TAB(20);Y; ' احصائية الاختبار =
60 END

```

### المخرجات

احصائية الاختبار = -.8304549

وأما إذا كان حجم العينة صغيراً، والتباين مجهولاً، بافتراض أن تباينى المجتمعين اللذين سحبت منها العينتان متساويان، فإحصائية الاختبار - راجع الفصل الخاص بأهم التوزيعات - هي :

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - L}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \left[ \frac{n_1^2 s_1^2 (1 - n_1) + n_2^2 s_2^2 (1 - n_2)}{n_1 + n_2 - 2} \right]}}$$

### مثال (٨، ١٠) :

أجرى بحث لتقويم طريقتين فى التدريب على النسخ، ولقد تم اختيار عينتين عشوائيتين من مجموعتين تدربت كل منهما على واحدة من الطريقتين. كان حجم العينة الأولى ٥ أفراد،

والثانية ٦ أفراد، بينما كان الوسط الحسابي لعدد الكلمات الصحيحة في الدقيقة الواحدة يساوي ٣٠ للمجموعة الأولى، و ٣٢ للمجموعة الثانية. أما التباين الخاص بالقيم العينية للمجموعتين فيساوي ٩ و ١١ للمجموعة الأولى والثانية على التوالي. فهل هناك فرق جوهري بمستوى معنوية ١٠٪ بين الطريقتين؟

**الحل :**

$$f_1 : f_2 = 30 : 32$$

$$f_1 \neq f_2$$

$$\alpha = 10\%$$

$$\alpha = 5\%$$

$$n_1 = 30$$

$$n_2 = 32$$

$$\therefore \text{درجات الحرية} = 30 + 32 - 2$$

$$= 60$$

القيمة الحرجة من جدول توزيع تاء بالملحق وبمستوى ثقة ٩٥ ، ٠ وعلى ٩ درجات حرية هي :

$$t_{(0.05, 60)} = 1.833$$

إحصائية الاختبار (المحسوبة) هي :

$$t = \frac{(s_1^2 - s_2^2) / (n_1 - 1)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \left[ \frac{s_1^2 (n_1 - 1) + s_2^2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} \right]}}$$

(٥)

$$= \frac{0 - (32 - 30)}{\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{5} \left[ \frac{11 \times 5 + 9 \times 4}{2 - 6 + 5} \right]}}$$

$$= \frac{0 - (32 - 30)}{\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{5} \left[ \frac{11 \times 5 + 9 \times 4}{2 - 6 + 5} \right]}}$$

$$= 1.039$$

$$\text{وبما أن } 1.039 < 1.833$$

فالفرق ظاهري وليس جوهرياً، وعليه لا بد من قبول فرضية العدم القائلة بأنه لا يوجد فرق بين الطريقتين.  
البرنامج التالي يقوم بحساب إحصائية الاختبار حسب ما هو وارد بالمثال (١٠، ٨) السابق باستخدام المعادلة

$$T = \frac{A}{\sqrt{\frac{B}{C} \times \frac{1}{D}}}$$

حيث :

$$A = X_1 - X_2 - L = \text{الفرق}$$

$$L = 0$$

$$B = (N_1 - 1) V_1 + (N_2 - 1) V_2$$

$$C = N_1 + N_2 - 2$$

$$D = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}$$

$$N_1 = \text{حجم العينة الأولى}$$

$$N_2 = \text{حجم العينة الثانية}$$

$$V_1 = \text{تباين العينة الأولى}$$

$$V_2 = \text{تباين العينة الثانية}$$

```

10 REM          برنامج لاختبار الفرق بين وسطين
20 READ N1,N2,X1,X2,V1,V2,L
30 DATA 5,6,30,32,9,11,0
40 A=X1-X2-L
50 B=(N1-1)*V1+(N2-1)*V2
60 C=N1+N2-2
70 D=1/N1+1/N2
80 T=A/(SQR(B/C)*SQR(D))
90 PRINT TAB(20);T;" = اختبار إحصائية"
100 END

```

المخرجات

إحصائية الاختبار = -1.038712

## ٥ - اختبار الفرق بين وسطين لأزواج متشابهة أو لعينة واحدة :

تعتمد جميع الاختبارات السابقة على عيتين مستقلتين، أو معلم واحد لعينة، ويحدث أحياناً أن يكون الهدف هو اختبار الفرق بين وسطين لتجربتين أجريتا على نفس المجموعة من أفراد العينة، أو لقياس الفرق بين الوسطين قبل وبعد إجراء تجربة معينة، أو قياس أثر التجربة بعد تقسيم أفراد العينة إلى عيتين بأزواج متشابهة. ومثال ذلك الفرق بين وسطى الدرجات لمادتين بالنسبة لنفس مجموعة الطلاب، أو الفرق بين الوسطين للسرعة قبل وبعد التدريب على النسخ لنفس المتدربين، أو الفرق بين وسطى الزمن الذى يستغرقه عقاران لتجلط الدم بعد تقسيم أفراد العينة إلى عيتين متشابهتين.

فإذا كانت (أ) هى التجربة الأولى، و (ب) هى التجربة الثانية، بيننا (ر) ، و (ب) هما وسطا المجتمعين، وبافتراض أن (و) هى قيمة معينة و (ل) هى الفرق، فالفرق بين أى زوجين متشابهين هو :

$$(٦) \quad L - R = S - S_{\text{ب ر}}$$

أما الوسط الحسابى للفروق (ل) فهو :

$$(٧) \quad \bar{L} = \frac{1}{N} \sum L$$

حيث (ن) هى عدد الأزواج.

أما تباين الفروق فهو بالتالى :

$$(٨) \quad \frac{\sum (L - \bar{L})^2}{N - 1} = \sigma_L^2$$

وعليه تكون إحصائية الاختبار تابعة لتوزيع تاء على (ن - ١) درجات حرية، أى أنها :

$$(٩) \quad \frac{(\bar{L}) - (\bar{R}) - (\bar{D} - \bar{R})}{\sigma_L / \sqrt{N}} = t_{(N-1)}$$

وباعتبار أن فرضية العدم هى :

$$\mu = \mu_{\text{ب ر}}$$

فإحصائية الاختبار هي :

$$T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \quad (10)$$

مثال (٨، ١١) :

أجريت دراسة لقياس الأثر لطريقة معينة في التدريب على النسخ ، فاختيرت عينة من ٢٥ متدرباً ، وتم رصد السرعة في الدقيقة الواحدة لكل متدرب قبل التحاقه بالبرنامج وبعد انتهاء فترة التدريب على تلك الطريقة ، فكان مجموع الفروقات بين سرعتين يساوى ١٢٥ ، بينما كان مجموع مربعات تلك الفروقات ٨٥٠ .  
فهل تعتبر هذه الطريقة مفيدة بمستوى معنوية ١٠٪ ؟

الحل :

$$H_0 : \mu = 0$$

$$H_1 : \mu \neq 0 \quad \text{لأن الفرق غير محدد.}$$

$$\alpha = 10\% \\ \alpha = 5\%$$

القيمة الحرجة - باستخدام جدول توزيع تاء على ٢٤ درجة حرية وبمستوى ٩٥٪ هي :

$$T_{(0.95, 24)} = 1.711$$

إحصائية الاختبار هي :

$$T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \quad (10)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} \quad (7)$$

$$S^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n-1} \quad (8)$$

$$125 = \text{ل} \quad \Sigma$$

$$150 = \text{ل} \quad \Sigma$$

$$\frac{125}{25} = \text{ن} \quad \therefore$$

$$5 =$$

$$\frac{\frac{125 \times 125}{25} - 150}{24} = \text{ع} \quad \text{ر}$$

$$9,375 =$$

$$3,062 = \text{ع} \quad \therefore$$

$$\frac{5}{25 \sqrt{3,062}} = \text{ت}$$

$$8,165 =$$

وبما أن

$$1,711 < 8,165$$

فلا يمكن قبول فرضية العدم، بمعنى أنه يجب قبول الفرضية البديلة القائلة بأن هناك فرقاً بين سرعتين، ولا يمكن إنكار أثر تلك الطريقة.

فيما يلي برنامج لحل المسألة في المثال (٨، ١١) باستخدام المعادلتين :

$$M = (D_2 - (D_1 \times D_1 / N) / (N - 1))$$

$$T = \frac{D_1}{N \sqrt{M/N}}$$

حيث : إحصائية الاختبار

N = حجم العينة

D<sub>1</sub> = مجموع الفروقات

D<sub>2</sub> = مجموع مربعات الفروقات

M = ع<sup>٢</sup>ل



```

10 REM اختبار الفرضيات
20 READ N, D1, D2
30 DATA 25, 125, 850
40 M=(D2-(D1*D1/N))/(N-1)
50 T=D1/N/(SQR(M)/SQR(N))
60 PRINT TAB(20); T; ' احصائيه الاختبار
70 END

```

المخرجات

8.164966 = احصائيه الاختبار

## ٦ - اختبار الفرق لأكثر من وسطين :

يتم اختبار الفرق لأكثر من وسطين بأسلوب تحليل التباين الذى سيأتى ذكره كاملاً للحالات غير المعلمية بالفصل القادم.

## ٧ - اختبارات النسب :

### أ - اختبار نسبة واحدة :

اتضح من الفصل الخاص بأهم التوزيعات أن النسبة الخاصة بصفة معينة - مثل نسبة الذين أجابوا بنعم على سؤال معين - تتبع التوزيع ذا الحدين، فإذا كانت ح تعنى نسبة أفراد العينة الذين يتمتعون بصفة معينة، وكانت ح هى نسبة أفراد المجتمع الذين يتمتعون بتلك الصفة، فإنحصائية الاختبار تتبع التوزيع الطبيعى - راجع الفصل الخاص بأهم التوزيعات - على النحو التالى :

$$U = \frac{H - H_0}{\sqrt{H_0(1-H_0)/n}} \quad (11)$$

### مثال (٨، ١٢) :

يعتقد أن مقدرة الرجال فى حل المسائل الرياضية أكبر من مقدرة النساء، فاختيرت عينة عشوائية من ٢٠٠ شخص من بين الناجحين فى امتحان موحد للرياضيات، فأتضح أن بينهم ١٦٢ رجلاً والباقي من النساء. فهل يعتبر ذلك دليلاً كافياً بدرجة ثقة ٩٥٪ لاعتبار أن الرجال أكبر مقدرة من النساء فى حل المسائل الرياضية؟

### الحل :

لو أن عدد الرجال مساو لعدد النساء ، لأصبحت نسبة الرجال مساوية لنسبة النساء ، ويساوى كل منهما ٠,٥ ، لذلك فإن :

$$٠,٥ = \text{ف : ح}$$

$$٠,٥ < \text{ف : ح}$$

$$٠,٩٥ = \text{أ - ١}$$

∴ القيمة الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي هي :

$$١,٦٥ = \text{ي}_{٠,٩٥}$$

إحصائية الاختبار هي :

$$(١١) \quad \frac{\bar{X} - \text{ح}}{\sqrt{\frac{\text{ح}(\text{ح} - ١)}{ن}}} = \text{ي}$$

$$\frac{٠,٥ - \frac{١٦٢}{٣٠٠}}{\sqrt{\frac{٠,٥ \times ٠,٥}{٣٠٠}}} =$$

$$١,٣٨٦ =$$

وبما أن :

$$١,٦٥ > ١,٣٨٦$$

فلا بد من قبول فرضية العدم ، وهذا يعنى أن ذلك ليس كافياً لاعتبار الرجال أكثر كفاءة من النساء في حل المسائل الرياضية .

البرنامج التالي يحسب إحصائية الاختبار للمسألة بالمثال (١٢) . المتغيرات المستخدمة :

N	حجم العينة
N <sub>1</sub>	تكرار الصفة المطلوب اختبارها
C	النسبة حسب فرضية العدم

أما إحصائية الاختبار فهي :

$$M = \frac{\left( \frac{N_1}{N} - C \right)}{\sqrt{\frac{C(1-C)}{N}}}$$

```

10 REM اختبار الفرضيات
20 READ N,N1,C
30 DATA 300,162,0.5
40 M=(N1/N-C)/(SQRT(C*(1-C)/N))
50 PRINT TAB(20);M; 'احصائيه الاختبار'
60 END

```

المخرجات

احصائيه الاختبار = 1.385639

(ب) اختبار الفرق بين نسبتين عينيتين كبيرتين :

إذا كانت ح<sub>١</sub> وح<sub>٢</sub> تمثلان نسبتين من عينتين مستقلتين حجما ن<sub>١</sub> ون<sub>٢</sub> على التوالي ، وإذا كان حجما العينتين كبيرين ، بينما كانت ح<sub>١</sub> هي نسبة المجتمع الأول الذي يتمتع بصفة معينة ، تقابلها ح<sub>٢</sub> من المجتمع الثاني ، وبافتراض أن ل<sub>١</sub> هي الفرق بين النسبتين بناء على الفرضية

$$L = \frac{H_1 - H_2}{\sigma}$$

فإحصائية الاختبار تتبع التوزيع الطبيعي على النحو الآتى :

$$(١٢) \quad \frac{\bar{x}_2 - (\bar{x}_1 - \bar{x})}{\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n_1} + \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n_2}}} = y$$

حيث :

$$(١٣) \quad \bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

**مثال (٨، ١٣) :**

مصنعان لإنتاج المصابيح الكهربائية يعتقد أنهما متساويان من حيث الصفات فى الإنتاج .  
اختيرت عينة من ٢٠٠٠ مصباح من المصنع الأول ، و ٣٠٠٠ من المصنع الثانى ، فكان عدد  
المصابيح التى رفضت بعد فحصها يساوى ٥٠٠ مصباح من إنتاج المصنع الأول ، و ٩٠٠ من  
الثانى ، فهل يعتبر ذلك دليلاً كافياً بمستوى معنوية ٥٪ على أن إنتاج المصنع الأول أفضل من  
الثانى ؟

**الحل :**

$$ف : \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

$$ف : \bar{x}_1 > \bar{x}_2$$

حيث  $\bar{x}$  هى نسبة التالف .

$$١ = ٥\%$$

$$١ - ٠,٩٥ = ١$$

∴ القيمة الحرجة (المجدولة) هى :

$$١,٦٥ = y_{٠,٩٥}$$

إحصائية الاختبار هي :

$$(12) \quad Y = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)}{\sqrt{\frac{(\bar{X}_2 - 1)}{n_2} + \frac{(\bar{X}_1 - 1)}{n_1}}}$$

$$(13) \quad \bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{500}{2000}$$

$$= 0,25$$

$$\bar{X}_2 = \frac{900}{3000}$$

$$= 0,30$$

$$\therefore \bar{X} = \frac{900 + 500}{3000 + 2000}$$

$$= 0,28$$

$$1 - \bar{X} = 0,72$$

$$Y = \frac{0,30 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,72 \times 0,28}{3000} + \frac{0,72 \times 0,28}{2000}}}$$

$$\therefore Y = -3,846$$

$$\text{وبما أن } -3,846 > -1,65$$

فلا بد من رفض فرضية العدم وقبول الفرضية البديلة ؛ لأن إحصائية الاختبار تقع في منطقة الرفض . وهذا يعنى أنه وبمستوى معنوية ٥٪ يمكن القول بأن إنتاج المصنع الأول أفضل من الثانى من حيث المواصفات .

فيما يلي برنامج لحساب إحصائية الاختبار للمسألة الواردة في المثال (١٣، ٨) السابق الخاصة باختبار الفرق بين نسبتي لعينتين كبيرتين باستخدام المعادلة :

$$M = \frac{L_1 - L_2}{\sqrt{L(1-L)/N_1 + L(1-L)/N_2}}$$

$$L = \frac{X_1 + X_2}{N_1 + N_2}$$

$X_1$  = تكرار الظاهرة الأولى

$X_2$  = تكرار الظاهرة الثانية

$N_1$  = المجتمع الأول

$N_2$  = المجتمع الثاني

$L_1$  =  $X_1/N_1$

$L_2$  =  $X_2/N_2$

$M$  = إحصائية الاختبار

```

10 REM      اختبار الفرضيات
20 READ N1,N2,X1,X2
30 DATA 2000,3000,500,900
40 L1=X1/N1
50 L2=X2/N2
60 L=(X1+X2)/(N1+N2)
70 M=(L1-L2)/SQRT(L*(1-L)/N1+L*(1-L)/N2)
80 PRINT TAB(20);M; ' = إحصائية الاختبار
90 END
    
```

إحصائية الاختبار = -3.857581

### (ج) اختبار الفرق بين نسبتين لعينتين صغيرتين :

اتضح مما مضى أنه إذا تم اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين طبيعيين، فتوزيع الفرق بين وسطيهما يتبع توزيع تاء. ولقد لوحظ أيضاً التشابه بين توزيعات النسب والأوساط، فتوزيع النسبة مشابه لتوزيع الوسط، وتوزيع الفرق بين نسبتين يشابه توزيع الفرق بين وسطين.

فإذا كانت فرضية العدم على النحو التالى :

$$F: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

فإحصائية الاختبار هي :

$$(14) \quad T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} =$$

على  $(n_1 - 1)$  أو  $(n_2 - 1)$  درجات حرية أيهما أكبر.

### مثال (١٤، ٨) :

يعتقد أن الرجال أكثر قدرة من النساء على حل المسائل الرياضية، فاختيرت عينة من ١٥ رجلاً و ٢٠ امرأة بنفس المستوى التعليمي، وجلسوا لامتحان موحد في الجبر. اتضح بعد النتيجة أن عدد الراسبين يساوى ثمانية بينهم ٣ رجال فقط. فهل يعتبر هذا دليلاً كافياً بمستوى معنوية ٥، ٢٪ على أن مستوى الرجال في الرياضيات أفضل من النساء؟

### الحل :

$$F: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{نسب الراسبين متساوية}$$

$$F: \mu_1 > \mu_2 \quad \text{نسبة الراسبين بين الرجال أقل من النساء}$$

$$n_1 = 14$$

$$n_2 = 19$$

$$\alpha = 0.05$$

$$df = 1 - 1 = 0$$

∴ القيمة الحرجة (المجدولة) من توزيع تاء على ١٩ درجة حرية وبدرجة ثقة ٠,٩٧٥ هي :

$$t = 2.093$$

إحصائية الاختبار هي :

$$(14) \quad t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(\bar{X}_1 - 1) \bar{X}_1}{n_1} + \frac{(\bar{X}_2 - 1) \bar{X}_2}{n_2}}}$$

حيث :

$$\bar{X}_1 = \frac{3}{15}$$

$$= 0.20$$

$$\bar{X}_2 = 0.80$$

$$\bar{X}_1 = \frac{5}{20}$$

$$= 0.25$$

$$\bar{X}_2 = 0.75$$

$$t = \frac{0.25 - 0.20}{\sqrt{\frac{0.75 \times 0.25}{20} + \frac{0.80 \times 0.20}{15}}} = -3.52$$

وبما أن  $-3.52 < -2.093$  فإن إحصائية الاختبار ضمن منطقة القبول. إذاً لا بد من قبول فرضية العدم، وعليه ليس هناك دليل بمستوى ٠,٠٥ على تفوق الرجال على النساء في حل المسائل الرياضية.



فيما يلي برنامج لإيجاد إحصائية الاختبار للبيانات الواردة في المثال (١٤، ٨) السابق الخاصة باختبار الفرضية لعينتين صغيرتين باستخدام إحصائية الاختبار

$$M = \frac{B_1 - B_2}{D}$$

حيث :  $M =$  ت

$B_1 = \frac{A_1}{N_1}$  = النسبة الأولى

$B_2 = \frac{A_2}{N_2}$  = النسبة الثانية

$$D = \sqrt{C_1 + C_2}$$

$$C_1 = B_1 (1 - B_1) / N_1$$

$$C_2 = B_2 (1 - B_2) / N_2$$

```

10 REM      اختبار الفرضيات
20 READ N1,N2,A1,A2
30 DATA 15,20,3,5
40 B1=A1/N1
50 B2=A2/N2
60 C1=B1*(1-B1)/N1
70 C2=B2*(1-B2)/N2
80 D=SQR(C1+C2)
90 M=(B1-B2)/D
100 PRINT TAB(20);M;' = إحصائية الاختبار '
110 END
    
```

المخرجات

إحصائية الاختبار = -.3531859

## ٨. اختبارات التباين :

### أ. اختبار التباين لعينة واحدة :

يكون الهدف من الاختبار في بعض الحالات هو اتخاذ قرار بشأن التجانس بين قيم المجتمع . فزيادة التباين في أى صفة من الصفات الخاصة بإنتاج أحد المصانع مثلاً، تدل على

ضعف استمرارية الدقة، فإذا كان تباين المجتمع هو  $\sigma^2$ ، يجب ألا يكون الفرق بينه وبين المقدار المحدد للتباين ( $\sigma^2$ ) فرقاً جوهرياً، بمعنى أن فرضية العدم هي :

$$F_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

وبما أن التباين الذي يمكن قياسه بالفعل، واتخاذ تقديره لتباين المجتمع، هو تباين العينة ( $\sigma^2$ )، فلا مناص من الاعتماد عليه في اتخاذ القرار. ولقد اتضح من الفصل الخاص بأهم التوزيعات أن :

$[ (n-1) \sigma^2 / \sigma_0^2 ]$  تتبع توزيع مربع كاي على  $(n-1)$  درجات حرية. وعليه تكون إحصائية الاختبار هي :

$$K = \frac{(n-1) \sigma^2}{\sigma_0^2} \quad (15)$$

بينما تكون القيمة الحرجة هي القيمة المستخرجة من توزيع مربع كاي على  $(n-1)$  درجات حرية. بيد أن القيم المكونة لإحصائية الاختبار لا تكون إلا موجبة في جميع الحالات، كما أن توزيع مربع كاي غير متشابه؛ لذلك يكون الحد الأعلى لمنطقة القبول عند مستوى المعنوية (أ)، إذا كانت الفرضية البديلة ذات طرف واحد والمستوى  $(\frac{1}{4})$  إذا كانت ذات طرفين. أما الحد الأدنى لمنطقة القبول فتكون عند مستوى معنوية  $(1-\alpha)$ ، إذا كانت الفرضية البديلة ذات طرف واحد، وبالمستوى  $(1 - \frac{1}{4})$  إذا كانت الفرضية البديلة ذات طرفين.

#### مثال (٨، ١٥) :

يتم التقدير النهائي للمتدربين بمعهد الإدارة العامة بافتراض أن الوسط الحسابي لدرجات المتحنيين في كل مادة يساوي ٧٥، والانحراف المعياري يساوي ١٠. اختيرت عينة عشوائية من ٢٥ متدرباً في أحد البرامج فاتضح أن الوسط الحسابي لدرجات أفراد هذه العينة في مادة مبادئ الإدارة يساوي بالفعل ٧٥، إلا أنه اتضح أن الانحراف المعياري يساوي ١٢، فهل يعتبر الانحراف المعياري في هذه المادة أكبر من الانحراف المعياري المحدد لدرجة تؤثر على دقة التقويم، علماً بأن مستوى معنوية الاختبار يساوي ٥٪؟

## الحل :

$$f : m^2 = m^2$$

أى أن :

$$f : m^2 = 100$$

$$f : m^2 < 100$$

$$1 = 5\%$$

$$1 - 95\%$$

$$n - 1 = 24$$

∴ الحد الأعلى لمنطقة القبول (القيمة الحرجة) من جدول توزيع مربع كاي على 24 درجة حرية يكون بمستوى 0,05 وهو يساوى

$$k = 36,415$$

(لاحظ أن الحد الأدنى يكون بمستوى 0,95 ويساوى 13,8484).

أما إحصائية الاختبار فهي :

$$k = \frac{(n-1) \chi^2}{m^2} \quad (15)$$

$$= \frac{24 \times (12)^2}{(10)^2} = 34,56$$

وبما أن إحصائية الاختبار أقل من الحد الأعلى لمنطقة القبول، فيجب قبول فرضية العدم بمستوى معنوية 5%. إذاً فلا يوجد فرق جوهري بين التباين في تلك المادة والتباين المحدد للتقويم.

البرنامج التالى يقوم بحساب إحصائية الاختبار للتباين بين صفتين للبيانات الواردة فى المثال ١٥، ٨ السابق.

المتغيرات المستخدمة :

N	حجم العينة
$X_1$	الوسط الحسابى للصفة الأولى
$V_1$	الانحراف المعيارى للصفة الأولى
$X_2$	الوسط الحسابى للصفة الثانية
$V_2$	الانحراف المعيارى للصفة الثانية

```

10 REM      اختبار الفرضيات
20 READ N, X1, V1, X2, V2
30 DATA 25, 75, 10, 75, 12
40 M=((N-1)*(V2**2)/V1**2)
50 PRINT TAB(20);M; ' احصائية الاختبار =
60 END

```

المخرجات  
-----

34.56 = احصائية الاختبار

#### (ب) اختبار المقارنة بين تباينين :

إذا كان الهدف من الاختبار هو مقارنة تباينين لمجتمعين طبيعيين مستقلين بعضهما عن بعض لمعرفة ما إذا كان الفرق بينهما جوهرياً أم ظاهرياً، أو لتحديد أيهما أكثر تجانساً باستمرار، ففرضية العدم هى :

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

بينما تتخذ الفرضية البديلة أحد الأنماط التالية :

$$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

أو

$$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

أو :

$$f_1 : f_2 \neq f_2$$

فإذا كانت فرضية العدم مقبولة فإن نسبة أى من التباينين تساوى الواحد أو قريبة منه (فب :  $\frac{f_1}{f_2} = 1$ ). أما إذا كان الفرق بين التباينين جوهرياً، فتكون النسبة بعيدة عن الواحد، ولكنها لا تكون سالبة؛ لأن التباين موجب في جميع الحالات. تعتمد إحصائية الاختبار على تقديري التباينين وهما  $f_1$  و  $f_2$ ، ولقد اتضح من الفصل الخاص بأهم التوزيعات أن :

$\frac{f_1}{f_2}$  تتبع توزيع فاء على  $(n_1 - 1)$  و  $(n_2 - 1)$  درجات حرية مما جعل البعض يسمى توزيع  $f_2$  فاء بتوزيع نسبة التباين. وخلاصة القول هي أن إحصائية الاختبار :

$$f = \frac{f_1}{f_2} \quad (16)$$

وأما القيمة الحرجة فتستخرج من جدول توزيع فاء بالملحق على  $(n_1 - 1)$  و  $(n_2 - 1)$  - أى درجات حرية البسط أولاً، ثم درجات حرية المقام - وبمستوى المعنوية المحدد. وتجدر الإشارة هنا إلى أن التباين الأكبر يكون بسطاً إذا كانت الفرضية البديلة ذات طرف واحد، وذلك تفادياً للبحث عن أدنى حد للقبول. أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات طرفين، فالحد الأدنى للقيمة الحرجة هو مقلوب الحد الأعلى للقيمة الحرجة بعد استبدال درجات حرية البسط والمقام؛ لأن القيم المجدولة هي القيم العليا فقط. إذاً فلاستخراج الحد الأدنى للقبول تستخرج القيمة المناظرة من جدول توزيع فاء على  $(n_2 - 1)$  و  $(n_1 - 1)$  درجات حرية ومن ثم مقلوبها.

بيد أن توزيع فاء يتأثر كثيراً بالانحراف عن التوزيع الطبيعي؛ لذلك يجب عدم استخدامه في حالة العينات الصغيرة الحجم، إلا إذا كان المجتمع الخاص بكل عينة طبيعياً.

#### مثال (٨، ١٦) :

كان الانحراف المعياري لدرجات ١٥ دارساً في مادة الرياضيات يساوى ٢٠، بينما كان الانحراف المعياري لدرجات ١٧ طالباً في الاقتصاد يساوى ١٦. فهل يعتبر ذلك دليلاً كافياً بمستوى معنوية ١٪ على أن مادة الرياضيات أكبر قدرة على التمييز بين الطلاب؟

**الحل :**

$$\begin{aligned} f_0 : f_1 &= \frac{f_0}{f_1} = \frac{2}{2} \\ f_1 : f_2 &= \frac{f_1}{f_2} = \frac{2}{2} < \frac{2}{2} \\ 1 &= 1 \\ n_1 &= 1 - \frac{1}{2} = 1 \\ n_2 &= 1 - \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

القيمة الحرجة من جدول توزيع فاء هي :

$$f_{(16, 14)} \text{ بمستوى } 1\% = 3,45$$

إحصائية الاختبار :

$$\begin{aligned} f &= \frac{f_{\text{ع}}}{f_{\text{ع}}} \\ f &= \frac{220}{216} \\ &= 1,019 \\ &= 1,063 \end{aligned}$$

وبما أن إحصائية الاختبار أقل من القيمة الحرجة، فهي إذاً في منطقة القبول. لذلك لا بد من قبول فرضية العدم القائلة بأنه لا يوجد فرق جوهري بين مقدرة الرياضيات والاقتصاد في التمييز بين الطلاب.

**ملحوظة :**

لو كانت الفرضية البديلة ذات طرفين ولو كان مستوى المعنوية 2٪، لكان الحد الأعلى لمنطقة القبول هو :

$$f_{(16, 14)} \text{ بمستوى معنوية } 1\% \text{ أيضاً} = 3,45$$

ولإيجاد الحد الأدنى تستخرج أولاً

$$3,62 = \text{ف (١٤,١٦) بمستوى معنوية ١\%}$$

ومقلوبها :

$$\frac{1}{3,62} = \frac{1}{\text{ف (١٤,١٦,١)}}$$

$$0,276 =$$

فيما يلي برنامج لحساب إحصائية اختبار المقارنة بين تباينين حسب البيانات الواردة بالمثل (٨, ١٦) السابق وباستخدام المعادلة

$$M = \frac{(V_1)^2}{(V_2)^2}$$

حيث :

M = إحصائية الاختبار = ف

V<sub>1</sub> = الانحراف المعياري للعينة الأولى

V<sub>2</sub> = الانحراف المعياري للعينة الثانية

```

10 REM      اختبار الفرضيات
20 READ V1,V2
30 DATA 20,16
40 M=(V1*V1)/(V2*V2)
50 PRINT TAB(20);M; ' إحصائية الاختبار
60 END
    
```

المخرجات

إحصائية الاختبار = 1.5625

## تمارين

- ١ - وضح بيانياً الفرق بين منطقة القبول ومنطقة الرفض .
- ٢ - ما هي أنواع القرارات التي تتخذ تحت ظروف عدم التأكد؟ وما هي القرارات الصحيحة منها؟ هل يمكن ارتكاب خطأين في قرار واحد؟
- ٣ - ما هو الخطأ من النوع الأول؟ وما هو الخطأ من النوع الثاني؟ ولماذا ارتبطت المخاطرة بأحدهما دون الآخر؟
- ٤ - ما هي العلاقة بين : كمية المخاطرة، ومستوى الثقة، ومستوى المعنوية، وقوة الاختبار؟
- ٥ - ما هي المتغيرات الثلاثة التي يعتمد عليها اختبار الفرضية؟
- ٦ - عرف : فرضية العدم، والفرضية البديلة، وعلاقتها بمنطقة القبول والرفض .
- ٧ - يتخذ القرار بناء على قيمتين، ما هما؟ وما مصداهما؟
- ٨ - يفترض صاحب مؤسسة أن العاملين بمؤسسته يتمتعون بصفة الأمانة، إلا أن المراجعة اليومية لأموال المؤسسة قد أثبتت أن هناك فرقاً في الحسابات بطريقة يومية، إذ تكون المبالغ الموردة أقل مما يجب بقليل . وهناك شخص واحد فقط هو المسؤول عن الصندوق، مما جعل صاحب المؤسسة في حاجة لاتخاذ قرار بشأنه، بأن يعتبره غير أمين ويوجه له تهمة بذلك، أو يعتبر أن هذا الفرق الطفيف يأتي دائماً نتيجة خطأ في الصرف يرتكبه أمين الصندوق . إزاء ذلك :
  - أ - ما هي فرضية العدم؟
  - ب - ما هو الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني؟
  - (حدد أنواع القرارات أولاً) .
- ٩ - تعتقد إدارة إحدى شركات الخطوط الجوية أن ٧٠٪ من مسافريها يفضلون التدخين داخل الطائرة، فأرادت أن تختبر ذلك . وضح الحالات التي يمكن أن ترتكب فيها أخطاء من النوع الأول والنوع الثاني .
- ١٠ - يرغب أحد المديرين في تكليف أحد موظفيه بأعباء إدارية إضافية . وضح الحالات التي يمكن أن يرتكب فيها المدير أحد أنواع الأخطاء .



١١ - تعتقد إدارة إحدى المؤسسات أن الوسط الحسابى لأعمار العاملين فيها لا يقل عن ٢٨ سنة، وباختيار عينة عشوائية من ٢٠ من العاملين فى تلك المؤسسة اتضح أن أعمارهم كانت كالآتى :

٢٥، ٢٨، ٣٠، ٣٢، ٤٢، ١٩، ٢٠، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٦٢، ٢٣، ١٨، ٢٦،  
٤٤، ٦٥، ٣٣، ٥١، ٢٨، ١٩

اختبر صحة تلك الفرضية بمستوى معنوية ٥٪، إذا علمت أن توزيع أعمار العاملين بتلك المؤسسة طبيعى .

١٢ - استخدم بيانات السؤال السابق إذا كان اعتقاد إدارة المؤسسة هو أن الوسط الحسابى للعمر لا يزيد على ٣٥ سنة.

١٣ - استخدم بيانات السؤال الحادى عشر إذا كان الاعتقاد هو أن الوسط الحسابى للعمر يساوى ٣٥ سنة.

١٤ - تعتقد إدارة أحد المصانع أن التدريب يرفع كفاءة عمال قسم التعبئة البالغ عددهم ٩٠ عاملاً، وللتأكد من ذلك تم اختيار ٣٦ عاملاً اختياراً عشوائياً، وتم تدريبهم لفترة معينة، وأعيدوا بعدها للعمل . اتضح بعد ذلك أن الوسط الحسابى لعدد الصناديق التى قام بتعبئتها المدربون قد بلغ ٩٦ صندوقاً بانحراف معيارى يساوى ٤، بينما بلغ الوسط الحسابى لغير المدربين ٧٥ صندوقاً بانحراف معيارى يساوى ١٠ . اختبر بمستوى معنوية ٥٪ ما إذا كان التدريب مفيداً أم لا .

١٥ - ترغب إدارة المشتريات بإحدى المؤسسات فى اختيار طلاء مناسب لمبانى المؤسسة، فلم تستطع ترسية العطاء لأى من شركتين، فاختارت أربع علب بنفس الحجم من كل نوع . فأتضح أن الوسط الحسابى للنوع الأول ١٧١ متراً مربعاً بانحراف معيارى ١٠ أمتار مربعة، بينما كان الوسط الحسابى للنوع الثانى ١٦٥ متراً مربعاً بانحراف معيارى ٩ أمتار مربعة . فهل هناك فرق جوهري بين النوعين بمستوى معنوية ٥٪؟

١٦ - أجريت تجربة على عينة عشوائية من ١٠ أشخاص من المصابين بأمراض القلب، وتعالطوا دواء يعتقد أنه يزيد ضربات القلب فى الدقيقة الواحدة بخمس ضربات، فكان عدد ضربات القلب لكل مريض قبل وبعد تعاطى الدواء على النحو الآتى :

رقم المريض	قبل الدواء	بعد الدواء
١	٦٣	٧١
٢	٧٠	٧٢
٣	٦٥	٧٢
٤	٦٠	٦٩
٥	٧١	٧٢
٦	٥٨	٦٨
٧	٥٦	٥٦
٨	٦١	٦٣
٩	٥٧	٥٥
١٠	٦٩	٧٢

اختبر صحة الفرضية بمستوى معنوية ٥٪.

١٧ - مصنعان لإنتاج أجهزة الهواتف، اختيرت عينة عشوائية من إنتاج المصنع الأول منها قوامها ٥٠٠ جهاز، فأتضح بعد فحصها أن هناك ٥٠ هاتفاً تالفاً، بينما اختيرت عينة من إنتاج المصنع الثاني حجمها ٦٠٠ هاتف كان بينها ٤٢ هاتفاً تالفاً. فهل يعتبر إنتاج المصنع الثاني أفضل من الأول بمستوى معنوية ٥٪؟

١٨ - اختبر فرضية السؤال السابق بمستوى معنوية ٥,٢٪، لو أن حجم العينة الأولى ٥ هواتف، وحجم العينة الثانية ٨ هواتف، والتالف من النوع الأول هاتف واحد، ومن النوع الثاني هاتفان.

١٩ - تعتقد إحدى الشركات الخاصة بإنتاج السيارات أن السيارة تقطع ١٠ كيلومترات بلتر واحد من البنزين بانحراف معياري يساوي ٣ كيلومترات، إلا أنه، وباختيار عينة قوامها ٢١ سيارة من ذلك النوع، اتضح أن الوسط الحسابي ٩ كيلومترات بانحراف معياري يساوي ٤ كيلومترات، فهل يعتبر الانحراف المعياري أكبر من الانحراف المعياري المحدد بمستوى معنوية ٥,٢٪؟

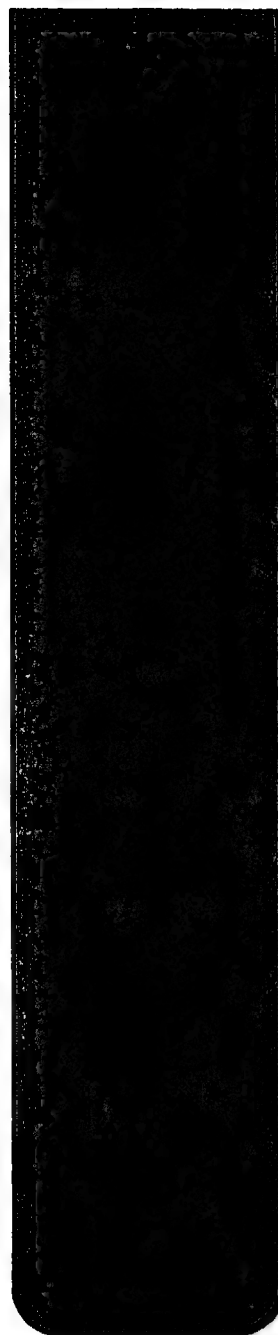
- ٢٠ - كان الانحراف المعياري لرواتب ٢٠ موظفاً بإحدى الشركات ٢٠٠٠ ريال، بينما كان الانحراف المعياري لرواتب ١٤ موظفاً بشركة أخرى ١٥٠٠ ريال. فهل يعتبر ذلك دليلاً كافياً بمستوى معنوية ٥٪ على أن الرواتب في الشركة الثانية أكثر تجانساً؟
- ٢١ - اكتب برنامجاً بلغة بيسك لحساب إحصائية الاختبار للبيانات الواردة بالسؤال (١٤).
- ٢٢ - مستخدماً البيانات الواردة بالسؤال (١٥) - اكتب برنامجاً بلغة بيسك لإيجاد إحصائية الاختبار.
- ٢٣ - استخدم البيانات بالسؤال (١٧)، واكتب برنامجاً بلغة بيسك لإيجاد إحصائية الاختبار.



---

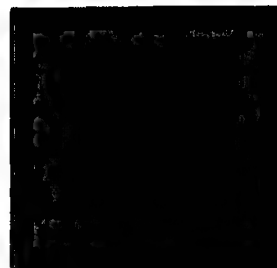
**تطبيقات الاختبارات غير العلمية  
على البيانات الاسمية والتسلسلية**

---





## تطبيقات الاختبارات فير المعلمية على البيانات الاسمية والتسلسلية



### ١ - الفرق بين الاختبارات المعلمية واللامعلمية :

اختصت جميع تطبيقات الفرضيات التي وردت في الفصل الماضي بمعالم التوزيع الإحصائي، كالوسط الحسابي والتباين. لذلك فقد اعتمدت جميعها على معرفة التوزيع الإحصائي للمتغيرات، وتلخص أسلوبها في مقارنة إحصائية الاختبار (المحسوبة) بالقيمة التي تناظرها في جدول التوزيع الذي تتبعه تلك الإحصائية (القيمة الحرجة).

إذاً هناك شرطان يجب توفرهما لإجراء تلك الاختبارات، وهما :

- ١ - معرفة التوزيع الإحصائي للمتغيرات، وهذا يعني أن هناك قيداً على التوزيع.
- ٢ - اختبار معالم ذلك التوزيع.

لذلك تسمى تلك التطبيقات بالاختبارات المعلمية (Parametric). هذا، ويلاحظ أن مجالات تلك التطبيقات قد انحصرت في البيانات ذات المقاييس النسبية والمرحلية. بيد أن هناك حالات لا تكون بياناتها إلا اسمية أو تسلسلية، كما لا يعرف الشيء الكثير عن التوزيع الإحصائي لتلك البيانات، أو أن هناك علماً مسبقاً بأنه يختلف اختلافاً جوهرياً عن التوزيعات المستخدمة في التطبيقات المعلمية.

عندئذ لا بد من اتباع أسلوب يخلو من قيد معرفة توزيع المتغير (Distribution - Free Method)، على ألا يخص الاختبار معلماً من معالم التوزيع المجهول أو تقديره. لذلك فقد أطلق على هذا النوع من الاختبارات الذي يتبع أسلوب التوزيع الحر للمتغيرات، ولا يهدف لاختبار معالم التوزيع بالاختبارات اللامعلمية (Nonparametric Tests). هذا، وتعتبر استمرارية التوزيع الإحصائي هي البقيد الوحيد على أسلوب التوزيع الحر للمتغيرات. وتجدر الإشارة إلى أن هذا التعميم للتوزيعات الإحصائية، وسهولة تطبيق الاختبارات اللامعلمية، لا بد أن تكون له بعض السلبيات. وأول تلك السلبيات وأهمها هو أن الاختبارات اللامعلمية لا ترقى لمستوى الاختبارات المعلمية من حيث الدقة.

بالرغم من ذلك فإن مجالات تطبيقات الاختبارات اللامعلمية كثيرة جداً، خاصة في المجالات الاجتماعية والإدارية، بل لا يمكن حصرها في فصل واحد؛ لذلك فسوف يتم استعراض أهم تلك الاختبارات وأكثرها استخداماً.

## ٢ - اختبارات البيانات الاسمية (Nominal) :

### ١ - ٢ ماهو المقياس الاسمي؟

المقياس الاسمي للبيانات (كما تم تعريفه من قبل) هو أكثر المقاييس بدائية، إذ يتم تصنيف البيانات حسب صفة أسماء معينة، كالدين، أو الجنس، أو الجنسية أو المهنة . . . . على ألا يكون هناك تداخل بين المجموعات بعد التصنيف. هذا، ويمكن تقديم أو تأخير أى مجموعة من المجموعات؛ لأن الترتيب لا يعنى التزاماً بالأفضلية. كذلك يمكن استبدال الأسماء بالأرقام (الترميز)، إلا أن القواعد الرياضية لا تطبق على هذه الأرقام؛ إذ لا يمكن جمعها، أو طرحها، أو ضربها، أو قسمتها، وهذا يعنى أن الفروقات بين تلك الرموز لا تعنى شيئاً أيضاً.

### ٢ - ٢ اختبارات حسن المطابقة للبيانات الاسمية لعينة واحدة

: (Goodness – Of Fit Tests)

المقصود بحسن المطابقة هو ما إذا كانت القيم العينية (المشاهدات) تطابق (Fit) القيم النظرية أو القيم المتوقعة، فإذا سحبت عينة عشوائية من المصابين بأحد الأمراض الذى يُعتقد أنه لا يخص جنساً دون آخر، فالعدد المتوقع من المصابين من الرجال هو نصف أفراد العينة. أما القيمة العينية (المشاهدة) فهو العدد الفعلى للمصابين من بين أفراد العينة. افرض أن حجم العينة كان ٣٠ شخصاً، إذا فالعدد المتوقع هو ١٥ رجلاً، فإذا اتضح أن هناك ١٩ رجلاً مصاباً بذلك المرض، فهل يعنى ذلك أن الرجال أكثر عرضة لذلك المرض من النساء؟ أم أن هذا الفرق (٤ أشخاص) يمكن أن يعزى للصدفة؛ لأنه غير جوهري؟ وهنا يأتى دور اختبار حسن المطابقة لعينة واحدة.

افرض أن :

ك ر تعنى التكرار الفعلى (القيمة العينية) لأى مجموعة.

ك' ر تعنى التكرار المتوقع (القيمة النظرية) لتلك المجموعة.

د عدد المجموعات.

ن حجم العينة.



فرضية العدم هي :

$$F_0: K_1 = K_2 = K_3 = \dots = K_r = K_r'$$

أما الفرضية البديلة :

$F_1$  : هناك تكرار (ك) واحد على الأقل يختلف اختلافاً جوهرياً عن نظيره المتوقع ( $K_r'$ ).

هذا، ويمكن (راجع النظرية التالية إذا دعا الحال) إثبات أن إحصائية الاختبار هي :

$$(1) \quad \frac{\sum_{r=1}^r (K_r - K_r')^2}{K_r} = K_r'$$

وهي تتبع توزيع مربع كاي على (د - ١) درجات حرية . وعليه تقارن إحصائية الاختبار (المحسوبة) بالقيمة الحرجة (من جدول توزيع مربع كاي بالملحق) بمستوى المعنوية المحدد (أ)، ويكون الفرق جوهرياً إذا كانت إحصائية الاختبار أكبر من القيمة الحرجة .

#### نظرية (١) :

تعتمد اختبارات حسن المطابقة على ما يسمى بالتوزيع المتعدد الحدود (Multinomial Distribution) وهو امتداد للتوزيع ذي الحدين، الذي ورد ذكره من قبل . فإذا كانت نسبة عناصر النوع الأول هي  $h_1$ ، ونسبة عناصر النوع الثاني هي  $h_2$ ، وهكذا حتى أصبحت نسبة عناصر النوع الأخير هي  $h_r$  فإن :

$$1 = \sum_{r=1}^r h_r$$

فإذا تم سحب عينة عشوائية حجمها  $n$  عنصراً، فاحتمال أن تتكون من  $n_1$  عنصراً من النوع الأول، و  $n_2$  عنصراً من النوع الثاني، وهكذا حتى أصبح هناك  $n_r$  عنصراً من النوع الأخير هو :

$$(2) \quad \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} h_1^{n_1} h_2^{n_2} \dots h_r^{n_r}$$

### نظرية (٢) :

إذا كانت  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  هي متغيرات عشوائية تتبع التوزيع المتعدد، فإن :

$$\chi^2 = \frac{\sum_{r=1}^n (s_r - n \cdot h_r)^2}{n \cdot h_r} \quad (٣)$$

تتبع توزيع مربع كاي على (د - ١) درجات حرية، وتزداد دقة هذا التوزيع بزيادة حجم العينة (ن)، كما يعتبر هذا التوزيع مناسباً إذا كان  $n \cdot h_r \geq 5$  لكل المجموعات.

افرض أن د = ٢

عندها تصبح

$$n = s_1 + s_2$$

$$1 = h_1 + h_2$$

$$n - s_1 = s_2$$

$$1 - h_1 = h_2$$

$$\chi^2 = \frac{(s_1 - n \cdot h_1)^2}{n \cdot h_1} + \frac{(s_2 - n \cdot h_2)^2}{n \cdot h_2}$$

$$= \frac{(s_1 - n \cdot h_1)^2}{n \cdot h_1} + \frac{(s_2 - n \cdot h_2)^2}{n \cdot h_2}$$

$$(٤) \quad \chi^2 = \frac{(s_1 - n \cdot h_1)^2}{n \cdot h_1 (1 - h_1)}$$

وعليه تكون :

$$\chi^2 = \frac{(s_1 - n \cdot h_1)^2}{n \cdot h_1 (1 - h_1)}$$

تتبع التوزيع الطبيعي كما ورد في الفصل الخاص بالتوزيعات. أما مربع التوزيع الطبيعي فهو توزيع مربع كاي على درجة حرية واحدة.

$$(٤) \quad \frac{(س_١ - ن_١ ح_١)^2}{ن_١ ح_١ (١ - ح_١)} = ك_٢ \quad \text{إذا :}$$

تتبع توزيع مربع كاي على درجة حرية واحدة، ومن ثم فإن :

$$(٥) \quad \frac{\sum_{j=1}^r (س_j - ن_j ح_j)^2}{ن_j ح_j (١ - ح_j)} = ك_٢$$

تتبع توزيع مربع كاي على (د - ١) درجة حرية . وباستبدال :

$$\begin{aligned} س_j &= ك_j \\ ن_j ح_j &= ك'_j \end{aligned}$$

$$(٦) \quad \frac{\sum_{j=1}^r (ك_j - ك'_j)^2}{ك'_j} = ك_٢ \quad \text{تصبح}$$

وذلك لأن  $\frac{ك'_j}{ن_j} \rightarrow 0$  صفر كلما كان حجم العينة كبيراً .

#### مثال (٩,١) :

اختيرت عينة عشوائية من ٣٠ متسرباً من متدربي البرامج الإعدادية لخريجي الجامعات بمعهد الإدارة العامة بالرياض، وكان الاعتقاد السائد هو أن عدد المتسربين لا يختلف بين برنامج وآخر (١٠ لكل برنامج)، إلا أن القيم العينية كانت على نحو ما هو مبين في الجدول أدناه :

العدد المتوقع (ك'_j)	عدد المتسربين (ك_j)	البرنامج
١٠	٩	الأنظمة
١٠	٧	الرقابة المالية
١٠	١٤	البنكية المتقدم
٣٠	٣٠	المجموع

**جدول (١)**  
توزيع المتسربين  
حسب البرامج لأفراد العينة

فهل تختلف نسبة المتسربين اختلافاً جوهرياً عن الثلث (١٠)؟ (مستوى المعنوية ٥٪).

## الحل :

ف : ك = ١٠ ؛ ك = ١٠ ؛ ك = ١٠  
 ف : هناك برنامج واحد على الأقل تختلف نسبته عن الثلث .

$$\begin{aligned} \text{أ} &= ٥\% \\ \text{د} &= ٣ \\ \text{د-١} &= ٢ \end{aligned}$$

القيمة الحرجة من توزيع مربع كاي على درجتى حرية وبمستوى معنوية ٥٪ (جدول توزيع مربع كاي بالملحق) تساوى ٥,٩٩ .

أما إحصائية الاختبار فنستخرج من المعادلة :

$$(٦) \quad \frac{\sum (K_r - K)^2}{K_r} = K^2$$

$$\begin{aligned} &\frac{2(10-14)^2}{10} + \frac{2(10-7)^2}{10} + \frac{2(10-9)^2}{10} = \\ &2,6 = \end{aligned}$$

وبما أن  $2,6 > 5,99$  فلا بد من قبول فرضية العدم ، بمعنى أنه ليس هناك دليل على وجود فرق جوهري بين أعداد المنسحجين من البرامج .

البرنامج التالى يقوم باختبار حسن المطابقة حسب ما هو بالمثال (١, ٩) ، باستخدام إحصائية الاختبار :

حيث

$$\begin{aligned} S &= T/K \\ T &= \sum (C_i - K)^2 \\ K &= \text{العدد المتوقع} \\ C &= \text{التكرار أو العدد الحقيقى} \end{aligned}$$

```

10 REM اختبار حسن المطابقة
20 REM GOODNESS OF FIT
30 DIM C(3)
40 K=10
50 FOR I=1 TO 3
60 READ C(I) REM القيم العينية
70 T=T+(C(I)-K)**2
80 NEXT I
90 S=T/K
100 PRINT 'الاحصائية الاختبار = S;'
110 DATA 9,7,14
120 END

```

المخرجات

الاحصائية الاختبار = 2.599999

مثال (٩,٢) :

أجريت دراسة قبل عام لمعرفة أفضل الصحف اليومية حسب آراء القراء، وكانت نتيجة الاستقصاء على النحو المبين بالجدول التالي.

النسبة المئوية لعدد الذين يفضلونها	الصحيفة
٦%	أ
٤٠%	ب
١٠%	ج
٢%	س
٨%	ص
٢٠%	و
١٤%	هـ
١٠٠%	المجموع

جدول (٢)

النسب المئوية حسب آراء القراء

أدت تلك الدراسة لأن تسعى كل صحيفة لتحسين مستواها العام ، وبعد مرور عام آخر أعيدت الدراسة لمعرفة ما إذا كان هناك تحول في آراء بعض القراء ، فكان عدد الذين يفضلون كل صحيفة من بين أفراد عينة عشوائية حجمها ٤٠٠ قارىء على النحو التالى :

توزيع القراء	الصحيفة
٢٠	أ
١٦٤	ب
٤٤	ج
١٠	س
٣٢	ص
٨٠	و
٥٠	هـ
٤٠٠	المجموع

**جدول (٣)**  
عدد الذين يفضلون في  
المرحلة الثانية من الاستقصاء

فهل هناك تحول في آراء القراء ؟ (مستوى المعنوية ٥٪).

**الحل :**

ف ب : ليس هناك تحول في الآراء .

ف ١ : هناك تحول تجاه صحيفة واحدة على الأقل .

$$١ = ٥\%$$

$$٧ = د$$

$$٦ = ١ - د$$

القيمة الحرجة من جدول توزيع مربع كاي ، وبمستوى معنوية ٥٪ ، وعلى ٦ درجات حرية تساوى ١٢,٥٩ .

أما بالنسبة لإحصائية الاختبار فلا توجد قيم متوقعة، إذ أن النسب هي التي حلت مكانها، لذلك تستخدم النسب المئوية الواردة بجدول (٢) لتقدير القيم المتوقعة من مجموع أفراد العينة، كما هو مبين في الجدول التالي :

**جدول (٤)**  
إحصائية الاختبار

الصحيفة	النسبة المئوية = ن من جدول (٢)	عدد القراء = ك ر من جدول (٣)	ك ر = $\frac{ن \times ٤٠٠}{١٠٠}$	ك ر - ك ر	(ك ر - ك ر)² ك ر
أ	%٦	٢٠	٢٤	٤ -	٠,٦٧٧
ب	%٤٠	١٦٤	١٦٠	٤	٠,١٠٠
ج	%١٠	٤٤	٤٠	٤	٠,٤٠٠
س	%٢	١٠	٨	٢	٠,٥٠٠
ص	%٨	٣٢	٣٢	٠	٠
و	%٢٠	٨٠	٨٠	٠	٠
هـ	%١٤	٥٠	٥٦	٦ -	٠,٦٤٣
المجموع	%١٠٠	٤٠٠		صفر	٢,٣١

إذاً إحصائية الاختبار

$$\chi^2 = \frac{\sum (ك ر - ك ر)^2}{ك ر} \quad (٦)$$

$$= ٢,٣١$$

وبما أن إحصائية الاختبار أقل من القيمة المحدولة (١٢,٥٩)، فليس هناك دليل كافٍ على أن هناك تحولاً في آراء القراء، أى لا بد من قبول فرضية العدم.

فيما يلي برنامج لحساب إحصائية الاختبار لحسن المطابقة عندما لا توجد قيم متوقعة حسب البيانات الواردة بالمثال (٩) باستخدام المعادلة :

$$T = \frac{\sum D^2(I)}{\sum C(I)}$$

حيث :

- T = إحصائية الاختبار  
D = الفرق بين التكرار الحقيقي والمتوقع  
C = التكرار المتوقع اعتماداً على النسبة

```

10 REM اختبار احسن المطابقة
20 DIM M$(7),A(7),B(7),C(7),D(7)
40 I=0
50 T=0
60 FOR I=1 TO 7
80 READ M$(I),A(I),B(I)
90 N=N+B(I)
100 NEXT I
110 PRINT USING 150
120 PRINT USING 140
130 PRINT USING 145
140 PRINT USING 147
150 PRINT USING 150
160 :
170 :
180 :
190 :
200 :
210 PRINT USING 220, E,D(I),C(I),B(I),A(I),M$(I)
220 :
230 NEXT I
235 PRINT
236 PRINT USING 237, T,N
237 :
238 PRINT
239 :
240 PRINT T, ' = اذن احصائيه الاختبار '
250 DATA A,6,20,B,40,164,C,10,44,D,2,10,E,8,32,F,20,80,G,14,50
270 END

```

#### المخرجات

ملاحظة النسبة	كـ	كـ	كـ - كـ	كـ - كـ	كـ
6%	20	24	-4	.667	A
40%	164	160	4	.100	B
10%	44	40	4	.400	C
28%	10	28	-18	.500	D
20%	80	80	0	0.000	E
14%	50	56	-6	.643	F
المجموع	400	0	2.310		G
اذن احصائيه الاختبار = 2.309523					



## ٣.٢ اختبار المجموعات المترابطة للملاحظات "Cochran Q test" :

تكون البيانات الاسمية هنا في شكل مجموعات مترابطة لا يقل عددها عن ثلاث مجموعات لكل فرد من أفراد العينة، بمعنى أن هناك ثلاث تجارب، أو أكثر، على نفس الحقل (الفرد) الذي تكون نتائجه مستقلة عن بقية النتائج. ولتوضيح ذلك خذ المثال التالي :

### مثال (٣ ، ٩) :

قام ثلاثة مدربين بتقديم موضوع معين بثلاث طرق مختلفة لاثني عشر متدرباً تم اختيارهم عشوائياً. وكانت الطريقة الأولى عبارة عن محاضرة فقط، والطريقة الثانية محاضرة مع وسيلة تعليمية (تلفزيون)، بينما كانت الطريقة الثالثة عبارة عن فيلم تلفزيوني فقط. كان الهدف من إجراء تلك التجارب هو تحديد ما إذا كان هناك فرق جوهري بين الطرق الثلاث أم لا؛ لذلك فقد سئل كل متدرب عن فاعلية كل طريقة، بأن تكون إجابته بنعم إذا كان يعتقد أنها فعالة، وتكون بلا إذا كانت غير فعالة. والجدول (٥) أدناه يبين الإجابات، بعد أن تم ترميزها بحيث يعنى الرقم (١) الإجابة بنعم، والرقم (صفر) الإجابة بلا. أى الفاعلية وعدم الفاعلية على التوالى.

رقم المتدرب	محاضرة	تلفزيون	محاضرة وتلفزيون	المجموع
١	١	٠	٠	١
٢	٠	٠	١	١
٣	١	١	٠	٢
٤	٠	٠	١	١
٥	١	٠	١	٢
٦	١	١	١	٣
٧	٠	١	١	٢
٨	٠	٠	٠	٠
٩	١	١	١	٣
١٠	٠	٠	١	١
١١	٠	٠	٠	٠
١٢	١	٠	١	٢
المجموع	٦	٤	٨	١٨

### جدول (٥)

آراء المتدربين حول فاعلية أو عدم فاعلية طرق التدريب المختلفة

## الحل :

ف : ليس هناك فرق بين الطرق الثلاث من حيث الفاعلية حسب آراء المتدربين .

ف : هناك فرق جوهري بين الطرق الثلاث .

(افرض أن مستوى المعنوية (أ) = ٥٪) .

يتلخص الأسلوب المتبع لتحديد القيمة المحسوبة (إحصائية الاختبار) فيما يلي :

إذا كانت :

س<sub>ر</sub> = مجموع أى عمود من الأعمدة (عدد الآراء المؤيدة لوسيلة تدريبية واحدة) .

ص<sub>ر</sub> = مجموع أى صف من الصفوف (عدد الحالات الإيجابية لكل متدرب) .

د = عدد العينات (عدد التجارب أو المجموعات) وهو عدد الطرق المختلفة في

هذا المثال .

فإحصائية الاختبار هي :

$$(٧) \quad \chi^2 = \frac{(١ - د) [\sum_{ر=١}^٣ \sum_{ص=١}^٣ (S_{ر,ص}^2) - \sum_{ر=١}^٣ (\sum_{ص=١}^٣ S_{ر,ص})^2]}{د \sum_{ر=١}^٣ \sum_{ص=١}^٣ S_{ر,ص}}$$

وهي تتبع توزيع مربع كاي على (د - ١) درجات حرية . إذا فالقيمة الحرجة (المجدولة)

تستخرج من جدول توزيع مربع كاي بالملحق على (د - ١) درجات حرية .

فالقيمة الحرجة في هذا المثال من جدول توزيع مربع كاي على درجتى (٣ - ١) حرية ،

و بمستوى معنوية ٥٪ تساوى ٥,٩٩ .

$$\chi^2 = \frac{(١ - ٣) [٣(١٨ + ٢٤ + ٢٦) - (\sum_{ص=١}^٣ \sum_{ر=١}^٣ S_{ر,ص})^2]}{٣ \times ١٨ - \sum_{ر=١}^٣ (\sum_{ص=١}^٣ S_{ر,ص})^2} = \chi^2$$

$$= \frac{٢٤ \times ٢}{١٦}$$

$$\chi^2 = ٣$$

وبما أن القيمة المحسوبة أقل من الحرجة فليس هناك دليل كافٍ لوجود فرق جوهري بين الطرق الثلاث. هذا، وتجدر الإشارة هنا إلى أن ذلك يعني الفرق بين جميع الطرق، ولو أن فرضية العدم قد رفضت، وكان هناك دليل على وجود فرق بين طرق التدريب، فذلك لا يعني أن الفرق يعزى لطريقة ما. فإذا أراد الباحث تحديد أنجع الطرق فعليه استخدام النسب الواردة في الفصل السابق لاختبار الفرق بين نسبتين.

البرنامج التالي يقوم باختبار المجموعات المترابطة للملاحظات حسب ما هو وارد بالمثال (٣) السابق.

لاحظ أننا استخدمنا هنا دالة خاصة، وهي دالة SUM في الأسطر 40, 50, 60، وهي دالة غير مستخدمة في كل الأجهزة، إلا أنه من الممكن كتابة السطرين 40 - 60 كالآتي إذا لم تكن هذه الدالة متوفرة في جهازك :

35 FOR I = 1 To 12

40 P = P + A (I)

45 Q = Q + B (I)

50 R = R + C (I)

60 NEXT I

هذا بالطبع بعد استخدام التعليمة LET لوضع القيمة صفر في المتغيرات R, Q, P  
أما باقى البرنامج فإنه لا يتأثر بأى تغيير.  
أما إحصائية الاختبار هنا فهي :

$$V = \frac{(D - 1) \times (D (P_2 + Q_2 + R_2) - T_2)}{DT - E}$$

حيث :

D = عدد التجارب (العينات أو المجموعات)  
P, Q, R = مجاميع الأعمدة الثلاثة  
T = المجموع الكلى لعدد الحالات الإيجابية  
E =  $M^2$   
M = مجموع الصف



## ٢ - اختبارات البيانات التسلسلية (ORDINAL) :

### ٢ - ١ ما هو المقياس التسلسلي؟

المقياس التسلسلي يأتي في مرحلة أعلى من المقياس الاسمي، إذ يتم تقسيم البيانات (كما ورد من قبل) إلى مجموعات متدرجة وبطريقة مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً، إلا أن الفروقات بين كل مجموعتين متتاليتين قد لا تكون متساوية؛ لذلك لا يمكن إخضاعها للعمليات الرياضية. وتعتبر التقديرات الخاصة بدرجات الامتحانات، أو ترتيب نتائج تلاميذ المدارس أمثلة لاستخدامات المقياس التسلسلي (الأول - الثاني - الثالث . . .). كذلك يعتبر التدرج في الآراء من الموافقة التامة إلى الرفض مثلاً آخر للبيانات التسلسلية (أوافق جداً، أوافق، لا أدرى، أرفض).

### ٢ - ٢ اختبار حسن المطابقة لعينتين من مجتمعين

(Kolmogorov – Smirnov Test)

المقصود بحسن المطابقة هو تطابق تكرار كل فئة (أو التكرار النسبي الذي يساوي نسبة تكرار الفئة إلى مجموع التكرارات) من العينة الأولى بنظيره في العينة الثانية. لقد أثبتت النظريات الإحصائية أن التجمع الصاعد للتكرار النسبي  $(\frac{K_r}{n})$  يمثل تقديراً جيداً لتوزيع المجتمع الذي سحبت منه العينة، ويكون الفرق بين التجمعين الصاعدين كبيراً، كلما كان الاختلاف بين التوزيعين كبيراً، والعكس صحيح؛ إذ تعزى الفروقات الطفيفة لعامل الصدفة.

من هذا المنطلق أصبح هذا الاختبار، الخاص بالمقارنة بين عينتين لتحديد ما إذا كان هناك فرق جوهري، يعتمد على أكبر فرق بين التجمعين الصاعدين للتكرارين النسبيين. هذا، وتنقسم الحالات التطبيقية إلى قسمين اعتماداً على حجم العينة، وسوف يتم استعراض كل حالة على انفراد.

### أ - عندما يكون حجم كل عينة من العينتين كبيراً :

الحجم الكبير للعينة هنا هو الذي لا يقل عن ٤٠ وحدة، أما طريقة تطبيق هذا الأسلوب فيوضحها المثال التالي :

### مثال (٩، ٤) :

أجريت دراسة لقراء إحدى المجلات الكبرى، فاختيرت عينة عشوائية حجمها مائة رجل، وعينة عشوائية أخرى حجمها ثمانون امرأة، وطلب من كل فرد إبداء رأيه في المستوى العام

للمجلة على مقياس يبتدىء من الصفر إلى ٢٥ ، بحيث يعنى الصفر أضعف مستوى ، وتعنى ٢٥ امتياز، فكانت النتائج على النحو الآتى :

التقدير (المستوى)	الرجال (كـ ر)	النساء (كـ ر)
٥ — ٠	٣	٥
١٠ — ٥	١٤	٣٢
١٥ — ١٠	٣١	٢٣
٢٠ — ١٥	٤٣	١٤
٢٥ — ٢٠	٠٩	٠٦
المجموع	١٠	٨٠

#### جدول (٦)

آراء أفراد العينة من الجنسين حول المجلة

اختبر فرضية العدم :

ف. : ليس هناك فرق جوهري بين آراء النساء والرجال حول هذه المجلة .

ضد الفرضية البديلة :

ف ١ : تقدير الرجال لمستوى هذه المجلة أعلى من تقدير النساء له - أى للمستوى ، مستوى المعنوية يساوى ٥٪ .

#### إحصائية الاختبار

إذا كانت :

ل = أكبر فرق بين التكرارين النسبيين التراكميين .

ن<sub>١</sub> = حجم العينة الأولى .

ن<sub>٢</sub> = حجم العينة الثانية .

فإحصائية الاختبار هى :

$$L = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_i^2)}{n_i}}{n_1 + n_2} \quad (٨)$$

### القيمة الحرجة :

تتبع إحصائية الاختبار السالفة الذكر توزيع مربع كاي على درجتى حرية مهما يكن حجم كل عينة كبيراً. وعليه تكون القيمة الحرجة من جدول توزيع مربع كاي بالملحق على درجتى حرية وبمستوى معنوية ٥٪ تساوى ٥,٩٩.

بيد أن تحديد قيمة إحصائية الاختبار المبينة في المعادلة سابقا، يعتمد على أكبر فرق بين التكرارين النسبيين التراكميين (ل). لذلك لا بد من اتباع الخطوات المبينة في الجدول التالى لاستخراج تلك القيمة.

### جدول (٧)

التكرار النسبي والتكرار النسبي التراكمي

التقدير	الرجال ك	النساء ك	التكرار النسبي للرجال	التكرار النسبي للنساء	التراكمي رجال	التراكمي نساء	الفرق
٥-٠	٣	٥	٠,٠٣	٠,٠٦	٠,٠٣	٠,٠٦	٠,٠٣
١٠-٥	١٤	٣٢	٠,١٤	٠,٤٠	٠,١٧	٠,٤٦	٠,٢٩٣
١٥-١٠	٣١	٢٣	٠,٣١	٠,٢٩	٠,٤٨	٠,٧٥	٠,٢٧
٢٠-١٥	٤٣	١٤	٠,٤٣	٠,١٧٥	٠,٩١	٠,٩٢٥	٠,٠١٥
٢٥-٢٠	٩	٦	٠,٠٩	٠,٠٧٥	١,٠٠	١,٠٠٠	صفر
المجموع	١٠٠	٨٠	١,٠٠	١,٠٠٠			

وعليه تكون :

$$ل = ٠,٢٩ \text{ (أكبر فرق بين التجمعين التراكميين).}$$

$$١ = ١٠٠ \text{ حجم العينة الأولى (رجال).}$$

$$٢ = ٨٠ \text{ حجم العينة الثانية (نساء).}$$

وبتطبيق معادلة إحصائية الاختبار السالفة الذكر :

$$(٨) \quad \frac{٤ ل ١ ن ٢ ن ٢}{٢ ن ١ ن + ٢ ن} = ٢ ل$$

تصبح

$$\frac{80 \times 100 \times 2(0,293) \times 4}{80 + 100} = 2$$

$$15,3 =$$

وبما أن إحصائية الاختبار أكبر من القيمة الحرجة (٥,٩٩) فلا يمكن قبول فرضية العدم. والخلاصة هي أن هناك دليلاً على وجود فرق جوهري بين آراء الرجال والنساء، إذ يمكن القول، وبمستوى معنوية ٥٪، إن الرجال أكثر تفضيلاً لهذه المجلة.

فيما يلي برنامج لحل المثال (٩, ٤) السابق.

نرجو ملاحظة استخدام دالة DSORT في السطر 190 هذه الدالة مع عبارة MAT تقوم بفرز كل القيم في المصفوفة D تنازلياً ووضعها في المصفوفة H. أما إذا لم تكن أوامر المصفوفات متوفرة في الجهاز الذي لديك فيمكنك الرجوع للمثال بالصفحة ٨٧، حيث هنالك فقرة خاصة بهذا النوع من الفرز.

أما إحصائية الاختبار فقد استخدمت المعادلة :

$$K = \frac{4 L^2 N_1 N_2}{N_1 + N_2}$$

حيث :

- L = أكبر فرق بين التكرارين النسبيين
- N1 = حجم العينة الأولى
- N2 = حجم العينة الثانية



```

10 REM      برنامج لاختبار حسن المطابقة لعينتين من مجتمعين
20 REM      KOLMOGOROV-SMIRNOV TEST
30 DIM A(5),B(5),M(5),F(5),P(5),Q(5),S(5),T(5),D(5),H(5)
40 READ N      REM عدد العينات
50 N1=0      REM SUM OF M
60 N2=0      REM SUM OF F
70 FOR I=1 TO N
80   READ A(I),B(I),M(I),F(I)  REM تكرار ١، تكرار ٢
90   N1=N1+M(I)
100  N2=N2+F(I)
110 NEXT I
120 FOR I=1 TO N
130   P(I)=M(I)/N1
140   Q(I)=F(I)/N2
150 NEXT I
160 S(1)=P(1)
170 T(1)=Q(1)
180 D(1)=ABS(S(1)-T(1))
190 FOR I=2 TO N
200   S(I)=S(I-1)+P(I)
210   T(I)=T(I-1)+Q(I)
220   D(I)=ABS(S(I)-T(I))
230 NEXT I
240 MAT H=DSORT(D)  REM SORT MATRIX D IN DESCENDING ORDER
250 L=H(1)  REM أكبر فرق
260 V=4*L+2*N1+N2/(N1+N2)
270 REM OUTPUT PART
280 PRINT USING 310
290 PRINT USING 290
300 PRINT USING 300
310 PRINT USING 310
320 FOR I=1 TO N
330   PRINT USING 320,D(I),T(I),S(I),Q(I),P(I),F(I),M(I),B(I),A(I)
340 NEXT I
350 PRINT
360 : السعدبر رجال نساء تكرار ينسى تكرار ينسى تراكمي تراكمي الفرق
370 :      لفر رجال لفر رجال لفر رجال لفر رجال
380 :
390 : ##### #.### #.### #.### #.### ### ## - ##
400 PRINT USING 350,V
410 : احصائيه الاختبار = ###.###
420 DATA 5,0,5,3,5,5,10,14,32,10,15,31,23,15,20,43,14,20,25,9,6
430 END

```

#### المخرجات

السعدبر	رجال	نساء	تكرار ينسى	تكرار ينسى	تراكمي	تراكمي	الفرق
لفر	رجال	لفر	رجال	رجال	رجال	رجال	
5 - 0	3	5	.030	.063	.030	.063	.033
10 - 5	14	32	.140	.400	.170	.462	.293
15 - 10	31	23	.310	.287	.480	.750	.270
20 - 15	43	14	.430	.175	.910	.925	.015
25 - 20	9	6	.090	.075	1.000	1.000	.000

احصائيه الاختبار = 15.210

لقد كان الاختبار في المثال السابق ذا اتجاه واحد؛ لأن الفرضية البديلة قد حددت باتجاه واحد. أما إذا كان الاختبار ذا اتجاهين؛ بسبب عدم تحديد اتجاه معين للفرضية البديلة، فيستخدم الجدول التالي لاستخراج القيمة الحرجة التي تقارن مباشرة بإحصائية الاختبار التي تساوي أكبر فرق بين التجمعين النسبيين التراكميين (ل)، والذي يتم استخراجه بنفس الطريقة المبينة في جدول (٧).

مستوى المعنوية (أ)	القيمة التي تكون بعدها ل دليلاً لرفض فرضية العدم حيث : ل = أكبر فرق بين التجمعين النسبيين التراكميين
٪١٠	$\frac{1}{2} \left( \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right) 1,22$
٪٥	$\frac{1}{2} \left( \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right) 1,36$
٪٢٥	$\frac{1}{2} \left( \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right) 1,48$
٪١	$\frac{1}{2} \left( \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right) 1,63$
٪٠,٥	$\frac{1}{2} \left( \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right) 1,73$
٪٠,١	$\frac{1}{2} \left( \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right) 1,95$

**جدول (٨) \***

القيم الحرجة لاختبار هيتين كبيرتين  
من مجتمعين عندما تكون الفرضية  
البديلة ذات الاتجاهين

فالقيمة الحرجة في المثال السابق (باعتبار أن مستوى المعنوية ذات الاتجاهين لا يزال ٪٥)  
تساوى :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{80 + 100}{80 \times 100} \right) 1,36$$

$$= 0,204$$

وأما إحصائية الاختبار فهي أكبر فرق بين التجمعين (جدول ٧)

$$ل = 0,29$$

وبما أن إحصائية الاختبار أكبر من القيمة الحرجة (٠,٢٠٤) فلا بد من رفض فرضية العدم  
وقبول الفرضية القائلة بأن هناك فرقاً بين آراء الرجال والنساء.

\* المصدر :

Isabel S. Patchett; Statistical Methods for Managers and Administrators; VNR, New  
York; 1982; Page 358.

### ب - العينة الصغيرة الحجم :

إذا كان حجم أى واحدة من العينتين أقل من ٤٠ ، وكان الحجمان فى ذات الوقت مختلفين (١ ≠ ٢) ، فيستخدم أسلوب العينات الكبيرة الوارد فى الفقرة (أ) السالفة الذكر للاختبار. أما إذا كان حجم العينتين متساويين (١ = ٢) وصغيرين فى نفس الوقت (أقل من ٤٠) فإحصائية الاختبار هى :  
ل = أكبر فرق بين المتجمعين التكراريين الصاعدين ، وأما القيمة الحرجة فتستخرج من الجدول رقم (٩) التالى :

**جدول (٩) \* : القيم الحرجة لاختبارات الفرضيات لعينتين صغيرتين متساويتى الحجم**

ن	الحجم واحد للاختبار		اختبار ذو اتجاهين		ن	الحجم واحد للاختبار		اختبار ذو اتجاهين	
	٠.٠٥ =	٠.٠١ =	٠.٠٥ =	٠.٠١ =		٠.٠٥ =	٠.٠١ =	٠.٠٥ =	٠.٠١ =
٣	٣	-	-	-	٢١	٨	١٠	٩	١١
٤	٤	-	٤	-	٢٢	٩	١١	٩	١١
٥	٤	٥	٥	٥	٢٣	٩	١١	١٠	١١
٦	٥	٦	٥	٦	٢٤	٩	١١	١٠	١٢
٧	٥	٦	٦	٦	٢٥	٩	١١	١٠	١٢
٨	٥	٦	٦	٦	٢٦	٩	١١	١٠	١٢
٩	٦	٦	٧	٦	٢٧	٩	١٢	١٠	١٢
١٠	٦	٧	٧	٨	٢٨	١٠	١٢	١١	١٣
١١	٦	٧	٨	٨	٢٩	١٠	١٢	١١	١٣
١٢	٦	٨	٨	٨	٣٠	١٠	١٢	١١	١٣
١٣	٧	٨	٨	٩	٣٥	١١	١٣	١٢	
١٤	٧	٨	٨	٩	٤٠	١١	١٤	١٣	
١٥	٧	٩	٩	٩					
١٦	٧	٩	٩	١٠					
١٧	٨	٩	٩	١٠					
١٨	٨	٩	١٠	١٠					
١٩	٨	٩	١٠	١٠					
٢٠	٨	٩	١٠	١١					

\* المصدر :

Robert D. Mason; Statistical Techniques In Business and Economics; Third Edition; 1974; Richard D. Irwin, Homewood; Page (637).

مثال (٥ ، ٩) :

افرض أن حجمي العينتين في المثال (٤) كانا على النحو الآتي :

**جدول (١٠)**

توزيع تكرارى لأراء الرجال والنساء حول إحدى المجالات

الفرق	التجمع الصاعد للنساء	التجمع الصاعد للرجال	النساء كـ	الرجال كـ	التقدير
٣	٣	٠	٣	٠	٥ - ٠
١١	١٥	٤	١٢	٤	١٠ - ٥
٩	٢٣	١٤	٨	١٠	١٥ - ١٠
١	٢٩	٢٨	٦	١٤	٢٠ - ١٥
٠	٣٠	٣٠	١	٢	٢٥ - ٢٠
			٣٠	٣٠	المجموع

∴ إحصائية الاختبار (ل) = ١١

وإذا كان مستوى المعنوية ٥٪ وكان الاختبار ذا اتجاه واحد، كما هو الحال في المثال (٤)، فالقيمة الحرجة من جدول (٩)، وعند حجم العينة (ن) الذى يساوى ٣٠، تقابل ١٠ .

وبما أن إحصائية الاختبار تفوق القيمة الحرجة بقليل فلا يمكن قبول فرضية العدم . هذا، ويلاحظ أن فرضية العدم ستكون مقبولة لو أن مستوى المعنوية (أ) يساوى ١٪؛ لأن القيمة الحرجة بذلك المستوى وبنفس حجم العينة تساوى ١٢ .

فيما يلى برنامج لحل المثال (٩ ، ٥) السابق، حيث إحصائية الاختبار هنا هى (L) التى تساوى أكبر فرق بين التجمعين التكراريين .

```

10 REM برنامج لحساب L عن طريق الفرق بين التجمعين التكراريين الماعدين
30 DIM A(5),B(5),M(5),F(5),P(5),Q(5),S(5),T(5),D(5),H(5)
40 READ N REM عدد العينات
50 N1=0 REM SUM OF M
60 N2=0 REM SUM OF F
70 FOR I=1 TO N
80 READ A(I),B(I),M(I),F(I)
90 N1=N1+M(I)
100 N2=N2+F(I)
110 NEXT I
120 S(1)=M(1)
130 T(1)=F(1)
140 D(1)=ABS(S(1)-T(1))
150 FOR I=2 TO N
160 S(I)=S(I-1)+M(I)
170 T(I)=T(I-1)+F(I)
180 D(I)=ABS(S(I)-T(I))
185 NEXT I
190 MAT H=DSORT(D) REM SORT MATRIX D IN DESCENDING ORDER
200 L=H(1) REM أكبر فرق
210 REM OUTPUT PART
220 PRINT USING 310
230 PRINT USING 290
240 PRINT USING 300
250 PRINT USING 310
260 FOR I=1 TO N
270 PRINT USING 320,D(I),T(I),S(I),F(I),M(I),B(I),A(I)
280 PRINT
290 NEXT I
300 :
310 :
320 :
330 :
340 PRINT USING 350,L
350 :
360 DATA 5,0,5,0,3,5,10,4,12,10,15,10,8,15,20,14,6,20,25,2,1
370 END

```

التقدير	رجال	نساء	تجمع ماعد رجال	تجمع ماعد نساء	الفرق
## - ##	###	###	###	###	##

احصائيه الاحتمال ##.### =

DATA 5,0,5,0,3,5,10,4,12,10,15,10,8,15,20,14,6,20,25,2,1

#### المخرجات

المصدر	رجال	نساء	تجمع ماعد رجال	تجمع ماعد نساء	الفرق
5 - 0	0	3	0	3	3
10 - 5	4	12	4	15	11
15 - 10	10	8	14	23	9
20 - 15	14	6	28	29	1
25 - 20	2	1	30	30	0

احصائيه الاحتمال = 11.000

### ٣ = ٢ اختبار مجموع الرتب لعينتين

: (Rank - Sum test)(Mann - Whitney U test)

إذا كان الهدف من الاختبار يخلص الفرق بين متوسط رتب العينة الأولى، ومتوسط رتب العينة الثانية، فاختبار الاستقلال لعينتين من نفس المجتمع أو مجموعتين بنفس التوزيع التالي ذكره هو الأمثل.

البيانات بجدول (١١) التالى عبارة عن درجات ١٢ طالباً من الصف الثالث بمدرسة قيس في مادة الرياضيات ، تقابلها درجات ١٤ طالباً من نفس الصف لنفس الاختبار بمدرسة زهير. هذا ، ولقد تم اختيار العينتين عشوائياً لاختبار فرضية العدم :

ف١ : مستوى طلاب مدرسة قيس يماثل مستوى طلاب مدرسة زهير في مادة الرياضيات .

ضد الفرضية البديلة :

ف٢ : مستوى طلاب مدرسة زهير أفضل من قيس في مادة الرياضيات .

مستوى المعنوية يساوى ٠,٠٥

يبدأ اختبار مجموع الرتب بترتيب مفردات العينتين معاً ترتيباً تصاعدياً ، إذ تستبدل أقل درجة بالعينتين بالرقم (الرتبة) ١ ، وتستبدل الدرجة التالية لها بالرتبة ٢ ، والدرجة الثالثة بالرتبة ٣ ، وهكذا حتى تصبح أعلى درجة بالرتبة ٢٦ . بمعنى أعم فإن الدرجات في العينتين تستبدل بأرقام متسلسلة أدناها الرقم ١ ، وأعلاها  $n_1 + n_2$  ، حيث  $n_1$  هي حجم العينة الأولى ، و  $n_2$  هي حجم العينة الثانية. هذا ، وتسمى تلك الأرقام المتسلسلة بالرتب. وبذلك يكون المجموع الكلى للرتب بالعينتين  $(n_1 + n_2)$   $\frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2}$  .

هذا ، ويلاحظ من جدول (١١) التالى أنه في حالة تساوى أكثر من درجة فرتبة كل مشاهدة هي متوسط الرتب المتتالية التى تقابلها ، فلقد أحرز ثلاثة طلاب بالمدرستين الدرجة ٧٢ (جدول ١١) ، بينما أحرز طالب واحد الدرجة ٧١ استحق عليها الرتبة السادسة . إذا فرتبة كل واحد من الطلاب الثلاثة هي  $\frac{9+8+7}{3} = 8$  وبذلك تكون رتبة الطالب الذى

حصل على ٧٣ درجة تساوى ١٠ كما هو مبين بالجدول .

إذا كانت :

$n_1$  = حجم العينة الأولى .

$n_2$  = حجم العينة الثانية .

$J_1$  = مجموع رتب العينة الأولى .

$J_2$  = مجموع رتب العينة الثانية .

فالإحصائية الخاصة بمجموع الرتب المعروفة بإحصائية مان ويتنى (Mann-Whitney)

هى :

$$(9) \quad s_1 = n_1 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - j_1$$

أو

$$(10) \quad s_2 = n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - j_2$$

هذا، ومن الممكن استخدام الإحصائية  $s_1$  أو الإحصائية  $s_2$ ، إلا أنه يفضل استخدام الإحصائية التي تعتمد على العينة الصغرى لأنها تكون أكثر أماناً عند الاختبار.

الرقم	مدرسة قيس		مدرسة زهير	
	الدرجة	الرتبة	الدرجة	الرتبة
١	٨٣	١٩	٨٦	٢١
٢	٧٢	٨	٧٨	١٥
٣	٧٥	١٢,٥	٧٢	٨
٤	٩٢	٢٥	٦٩	٤
٥	٧٣	١٠	٩٣	٢٦
٦	٧٩	١٦	٧٦	١٤
٧	٦٨	٣	٧٢	٨
٨	٨٧	٢٢	٧٠	٥
٩	٨٤	٢٠	٧٤	١١
١٠	٧٥	١٢,٥	٦٣	٢
١١	٨٢	١٨	٨١	١٧
١٢	٧١	٦	٦١	١
١٣			٨٩	٢٣
١٤			٩١	٢٤
المجموع		١٧٢		١٧٩

#### جدول (١١)

درجات ١٢ طالباً من مدرسة قيس  
و ١٤ طالباً من مدرسة زهير  
في مادة الرياضيات

تتبع إحصائية مان ويتنى السالفة الذكر - التوزيع الطبيعي بوسط حسابي  $\bar{s} = \frac{n_1 + n_2}{2}$  وانحراف معياري

$$(11) \quad \bar{s} = \frac{n_1 + n_2 + 1}{2}$$

بمعنى أن

$$(12) \quad \sqrt{\frac{n_1 n_2 (1 + n_2 + n_1)}{12}} = \epsilon$$

وعليه تكون إحصائية الاختبار :

$$Y = \frac{s - s'}{\epsilon} \quad \text{تابعة للتوزيع الطبيعي}$$

ويمكن بذلك مقارنة الإحصائية (Y) بالقيمة المجدولة بالملحق (١). أما S فهي S<sub>١</sub> أو S<sub>٢</sub>. هذا، وتجد الإشارة هنا إلى أن حجم كل عينة من العينتين يجب أن يزيد على ٧ مفردات. أما إذا كان أى من العينتين أقل من ذلك فهناك جداول خاصة بمعالجتها لن نتطرق إليها هنا لندرة استخداماتها.

#### مثال (٩,٦) :

بمستوى معنوية ٥٪ اختبر فرضية العدم القائلة بأنه لا يوجد فرق جوهري بين المستوى العام لمدرسة قيس والمستوى العام لمدرسة زهير، ضد الفرضية البديلة القائلة بأن المستوى العام لطلاب مدرسة زهير في مادة الرياضيات هو الأفضل.

#### الحل :

$$\begin{aligned} S_1 &= n_1 n_2 + \frac{n_1 (1 + n_1)}{2} - J_1 \\ &= 12 \times 14 + \frac{(1 + 12)12}{2} - 172 \\ &= 74 \\ S_2 &= n_1 n_2 + \frac{n_2 (1 + n_2)}{2} - J_2 \\ &= 12 \times 14 + \frac{(1 + 14)14}{2} - 179 \\ &= 94 \end{aligned}$$



ومن هنا يلاحظ أن :

$$س_1 + س_2 = ن_1 + ن_2$$

يمكن استخدام الإحصائية  $س_1$  أو الإحصائية  $س_2$  إلا أن استخدام الأصغر ( $س_1$ ) يكون أكثر أماناً، وعليه تكون :

$$\frac{ن_1 + ن_2}{2} = س$$

$$\frac{168}{2} =$$

$$84 =$$

$$(11) \quad \sqrt{\frac{س(ن_1 + ن_2 + 1)}{6}} = ع$$

$$\sqrt{\frac{(1 + 14 + 12) 84}{6}} =$$

$$19,4 =$$

إحصائية الاختبار هي :

$$(13) \quad \frac{س_1 - س}{ع} = ي$$

$$\frac{84 - 74}{19,4} =$$

$$= -0,515$$

وأما القيمة الحرجة من جدول توزيع (ي) بالملحق (١) بمستوى معنوية ٥٪ فتساوى ١,٩٦ . وبما أن القيمة المطلقة لإحصائية الاختبار (٠,٥١٥) ليست أكبر من القيمة الحرجة فلا يمكن رفض فرضية العدم .

البرنامج التالى يقوم باختيار مجموع الرتب لعينتين حسب طريقة مان ويتنى وتستخدم هنا البيانات بالمثل (٦, ٩).

أما إحصائية الاختيار هنا فهي :

$$W = \frac{D_1 - u}{v}$$

حيث :

$$D_1 = N_1 N_2 + \frac{N_1 (N_1 + 1)}{2} - T_1 = \text{س}_١$$

$N_1$  = حجم العينة الأولى

$N_2$  = حجم العينة الثانية

$T_1$  = مجموع رتب العينة الأولى ( $F_1$ )

$$U = \frac{N_1 N_2}{2} = \text{س}_٢$$

$$v = \sqrt{U (N_1 + N_2 + 1) / 6} = \text{ع}$$

```

01 REM برنامج لاختبار مجموع الرتبة لعينتين
02 REM RANK-SUM TEST BY MANN-WHITNEY U-TEST
10 DIM A(12),B(14),X(26),Y(12),F(12),H(14)
12 T1=0 REM USED TO SUM RANKS OF A
13 T2=0 REM USED TO SUM RANKS OF B
14 READ N1,N2 REM N1=NO OF OBS. FOR A, N2=NO OF OBS. FOR B
20 MAT READ A,B
30 FOR I=1 TO N1
40 X(I)=A(I)
50 NEXT I
60 FOR I=1 TO N1+N2
70 X(I)=B(I-N1)
80 NEXT I
90 MAT A=ASORT(A) REM SORT MATRIX A
100 MAT B=ASORT(B) REM SORT MATRIX B
110 MAT X=ASORT(X) REM SORT MATRIX X
120 C2=1
130 S=1
140 FOR I=2 TO N1+N2
150 IF X(I) = X(I-1) THEN 180 ELSE GOSUB 390
160 S=S+1
170 C2=C2+1
180 NEXT I
190 I=N1+N2+1
200 I=N2+1
210 GOSUB 390
220 FOR I=1 TO N1
230 FOR J=1 TO N1+N2
240 IF A(I)=X(J) THEN 270
250 NEXT J
260 E(I)=Y(J)
270 NEXT J
280 NEXT I
290 FOR I=1 TO N2
300 FOR J=1 TO N1+N2
310 IF B(I)=X(J) THEN 310
320 NEXT J
330 H(I)=Y(J)
340 NEXT I
350 PRINT USING 360
360 PRINT USING 360
370 PRINT
380 FOR I=1 TO N1
390 T1=T1+E(I)
400 NEXT I
410 FOR I=1 TO N2
420 T2=T2+H(I)
430 NEXT I
440 PRINT USING 370
450 PRINT USING 370
460 PRINT USING 371,T2,T1
470 PRINT
480 PRINT
490 PRINT
500 PRINT
510 PRINT
520 PRINT
530 PRINT
540 PRINT
550 PRINT
560 PRINT
570 PRINT
580 PRINT
590 PRINT
600 PRINT
610 PRINT
620 PRINT
630 PRINT
640 PRINT
650 PRINT
660 PRINT
670 PRINT
680 PRINT
690 PRINT
700 PRINT
710 PRINT
720 PRINT
730 PRINT
740 PRINT
750 PRINT
760 PRINT
770 PRINT
780 PRINT
790 PRINT
800 PRINT
810 PRINT
820 PRINT
830 PRINT
840 PRINT
850 PRINT
860 PRINT
870 PRINT
880 PRINT
890 PRINT
900 PRINT
910 PRINT
920 PRINT
930 PRINT
940 PRINT
950 PRINT
960 PRINT
970 PRINT
980 PRINT
990 PRINT
END

```

# المخرجات

الرتبة	مدرسة ب	الرتبة	مدرسة ا	مجموع
1	61	3	58	1
2	63	4	71	2
3	69	5	72	3
4	70	6	73	4
5	72	7	74	5
6	73	8	75	6
7	74	9	76	7
8	75	10	77	8
9	76	11	78	9
10	77	12	79	10
11	78	13	80	11
12	79	14	81	12
13	80	15	82	13
14	81	16	83	14
15	82	17	84	15
16	83	18	85	16
17	84	19	86	17
18	85	20	87	18
19	86	21	88	19
20	87	22	89	20
21	88	23	90	21
22	89	24	91	22
23	90	25	92	23
24	91	26	93	24
25	92	27	94	25
26	93	28	95	26
27	94	29	96	27
28	95	30	97	28
29	96	31	98	29
30	97	32	99	30
31	98	33	100	31
32	99	34	101	32
33	100	35	102	33
34	101	36	103	34
35	102	37	104	35
36	103	38	105	36
37	104	39	106	37
38	105	40	107	38
39	106	41	108	39
40	107	42	109	40
41	108	43	110	41
42	109	44	111	42
43	110	45	112	43
44	111	46	113	44
45	112	47	114	45
46	113	48	115	46
47	114	49	116	47
48	115	50	117	48
49	116	51	118	49
50	117	52	119	50
51	118	53	120	51
52	119	54	121	52
53	120	55	122	53
54	121	56	123	54
55	122	57	124	55
56	123	58	125	56
57	124	59	126	57
58	125	60	127	58
59	126	61	128	59
60	127	62	129	60
61	128	63	130	61
62	129	64	131	62
63	130	65	132	63
64	131	66	133	64
65	132	67	134	65
66	133	68	135	66
67	134	69	136	67
68	135	70	137	68
69	136	71	138	69
70	137	72	139	70
71	138	73	140	71
72	139	74	141	72
73	140	75	142	73
74	141	76	143	74
75	142	77	144	75
76	143	78	145	76
77	144	79	146	77
78	145	80	147	78
79	146	81	148	79
80	147	82	149	80
81	148	83	150	81
82	149	84	151	82
83	150	85	152	83
84	151	86	153	84
85	152	87	154	85
86	153	88	155	86
87	154	89	156	87
88	155	90	157	88
89	156	91	158	89
90	157	92	159	90
91	158	93	160	91
92	159	94	161	92
93	160	95	162	93
94	161	96	163	94
95	162	97	164	95
96	163	98	165	96
97	164	99	166	97
98	165	100	167	98
99	166	101	168	99
100	167	102	169	100
101	168	103	170	101
102	169	104	171	102
103	170	105	172	103
104	171	106	173	104
105	172	107	174	105
106	173	108	175	106
107	174	109	176	107
108	175	110	177	108
109	176	111	178	109
110	177	112	179	110
111	178	113	180	111
112	179	114	181	112
113	180	115	182	113
114	181	116	183	114
115	182	117	184	115
116	183	118	185	116
117	184	119	186	117
118	185	120	187	118
119	186	121	188	119
120	187	122	189	120
121	188	123	190	121
122	189	124	191	122
123	190	125	192	123
124	191	126	193	124
125	192	127	194	125
126	193	128	195	126
127	194	129	196	127
128	195	130	197	128
129	196	131	198	129
130	197	132	199	130
131	198	133	200	131
132	199	134	201	132
133	200	135	202	133
134	201	136	203	134
135	202	137	204	135
136	203	138	205	136
137	204	139	206	137
138	205	140	207	138
139	206	141	208	139
140	207	142	209	140
141	208	143	210	141
142	209	144	211	142
143	210	145	212	143
144	211	146	213	144
145	212	147	214	145
146	213	148	215	146
147	214	149	216	147
148	215	150	217	148
149	216	151	218	149
150	217	152	219	150
151	218	153	220	151
152	219	154	221	152
153	220	155	222	153
154	221	156	223	154
155	222	157	224	155
156	223	158	225	156
157	224	159	226	157
158	225	160	227	158
159	226	161	228	159
160	227	162	229	160
161	228	163	230	161
162	229	164	231	162
163	230	165	232	163
164	231	166	233	164
165	232	167	234	165
166	233	168	235	166
167	234	169	236	167
168	235	170	237	168
169	236	171	238	169
170	237	172	239	170
171	238	173	240	171
172	239	174	241	172
173	240	175	242	173
174	241	176	243	174
175	242	177	244	175
176	243	178	245	176
177	244	179	246	177
178	245	180	247	178
179	246	181	248	179
180	247	182	249	180
181	248	183	250	181
182	249	184	251	182
183	250	185	252	183
184	251	186	253	184
185	252	187	254	185
186	253	188	255	186
187	254	189	256	187
188	255	190	257	188
189	256	191	258	189
190	257	192	259	190
191	258	193	260	191
192	259	194	261	192
193	260	195	262	193
194	261	196	263	194
195	262	197	264	195
196	263	198	265	196
197	264	199	266	197
198	265	200	267	198
199	266	201	268	199
200	267	202	269	200
201	268	203	270	201
202	269	204	271	202
203	270	205	272	203
204	271	206	273	204
205	272	207	274	205
206	273	208	275	206
207	274	209	276	207
208	275	210	277	208
209	276	211	278	209
210	277	212	279	210
211	278	213	280	211
212	279	214	281	212
213	280	215	282	213
214	281	216	283	214
215	282	217	284	215
216	283	218	285	216
217	284	219	286	217
218	285	220	287	218
219	286	221	288	219
220	287	222	289	220
221	288	223	290	221
222	289	224	291	222
223	290	225	292	223
224	291	226	293	224
225	292	227	294	225
226	293	228	295	226
227	294	229	296	227
228	295	230	297	228
229	296	231	298	229
230	297	232	299	230
231	298	233	300	231
232	299	234	301	232
233	300	235	302	233
234	301	236	303	234
235	302	237	304	235
236	303	238	305	236
237	304	239	306	237
238	305	240	307	238
239	306	241	308	239
240	307	242	309	240
241	308	243	310	241
242	309	244	311	242
243	310	245	312	243
244	311	246	313	244
245	312	247	314	245
246	313	248	315	246
247	314	249	316	247
248	315	250	317	248
249	316	251	318	249
250	317	252	319	250
251	318	253	320	251
252	319	254	321	252
253	320	255	322	253
254	321	256	323	254
255	322	257	324	255
256	323	258	325	256
257	324	259	326	257
258	325	260	327	258
259	326	261	328	259
260	327	262	329	260
261	328	263	330	261
262	329	264	331	262
263	330	265	332	263
264	331	266	333	264
265	332	267	334	265
266	333	268	335	266
267	334	269	336	267
268	335	270	337	268
269	336	271	338	269
270	337	272	339	270
271	338	273	340	271
272	339	274	341	272
273	340	275	342	273
274	341	276	343	274
275	342	277	344	275
276	343	278	345	276
277	344	279	346	277
278	345	280	347	278
279	346	281	348	279
280	347	282	349	280
281	348	283	350	281
282	349	284	351	282
283	350	285	352	283
284	351	286	353	284
285	352	287	354	285
286	353	288	355	286
287	354	289	356	287
288	355	290	357	288
289	356	291	358	289

### ٣ = ٤ اختبار مجموع الرتب لأكثر من عينتين (Kruskal – Wallis H – test)

هذا الاختبار عبارة عن امتداد للاختبار السابق ، إذ يستخدم لاختبار فرضية العدم القائلة بأنه لا يوجد فرق جوهري بين أوساط العينات التي يزيد عددها على اثنتين .  
لذلك تبدو المرحلة الأولى من مراحل الاختبار بطريقة مشابهة للاختبار السابق ، إذ ترتب جميع المتغيرات ترتيباً تصاعدياً ، بحيث تستبدل أدنى قيمة بالرتبة ١ ، وتندرج تلك الرتب إلى أن تكون رتبة أعلى درجة هي مجموع أحجام العينات .  
فإذا كانت :

$$n_1 = \text{حجم العينة الأولى} .$$

$$n_2 = \text{حجم العينة الثانية} .$$

$$n_3 = \text{حجم العينة الثالثة} .$$

⋮

$$n_d = \text{حجم العينة الأخيرة}$$

$$d = \text{عدد العينات وهي ثلاث فأكثر}$$

$$(14) \quad n = \sum_{r=1}^d n_r$$

فترتيب أعلى قيمة =  $n$

أما مجموع الرتب فيساوى :

$$(15) \quad \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{وأما إذا كانت :}$$

$$ج_1 = \text{مجموع رتب العينة الأولى} .$$

$$ج_2 = \text{مجموع رتب العينة الثانية} .$$

$$ج_3 = \text{مجموع رتب العينة الثالثة} .$$

⋮

$$ج_d = \text{مجموع رتب العينة الأخيرة} .$$

فإحصائية الاختبار هي :

$$(16) \quad L_k = \frac{12}{n(n+1)} \left( \sum_{r=1}^d \frac{ج_r^2}{n_r} - \frac{3}{n(n+1)} \right)$$

وهي تتبع توزيع مربع كاي على  $(d-1)$  درجات حرية .

### مثال (٩, ٢):

اختيرت ثلاث عينات عشوائية من درجات الطلاب الذين تلقوا محاضراتهم في نفس المادة (الاقتصاد) بثلاث طرق مختلفة ، فكانت درجاتهم على النحو الآتي :

الطريقة الرقم	محاضرات	تليفزيون	محاضرات وتليفزيون
١	٨٦	٩٣	٨١
٢	٧٩	٧٧	٧٤
٣	٩٥	٨٤	٩٢
٤	٧٣	٨٠	٨٣
٥	٨٢	٩٤	٧١
٦	٨٨	٦٩	٨٩
٧		٩٠	٨٥
٨		٧٢	٩١
٩			٨٧
١٠			٧٨
١١			٧٠

### جدول (١٢)

درجات ٣ عينات من الطلاب  
في مادة الاقتصاد

فهل هناك فرق جوهري بين الطرق الثلاث بمستوى معنوية ٠,٠٥ ؟

### الحل :

$$٣ = د$$

$$٦ = ١ ن$$

$$٨ = ٢ ن$$

$$١١ = ٣ ن$$

$$٢٥ = ن .$$

$$٥\% = أ$$

∴ القيمة الحرجة من جدول توزيع مربع كاي بالملحق (٣) على درجتى حرية (٣ - ١) وبمستوى معنوية ٥% تساوى ٥,٩٩١ .

أما بالنسبة لإحصائية الاختبار فتستبدل الدرجات الواردة في جدول (١٢) بالرتب المبينة في جدول (١٣) أدناه على النحو الآتي :

الطريقة الرقم	محاضرات	تليفزيون	محاضرات وتليفزيون
١	١٦	٢٣	١١
٢	٩	٧	٦
٣	٢٥	١٤	٢٢
٤	٥	١٠	١٣
٥	١٢	٢٤	٣
٦	١٨	١	١٩
٧		٢٠	١٥
٨		٤	٢١
٩			١٧
١٠			٨
١١			٢
المجموع	٨٥	١٠٣	١٣٧

**جدول (١٣)**  
بيان برتب الدرجات الواردة  
في جدول (١٢)

$$\therefore \text{جـ } ١ = ٨٥$$

$$\text{جـ } ٢ = ١٠٣$$

$$\text{جـ } ٣ = ١٣٧$$

وعليه تكون إحصائية الاختبار

$$K^2 = \frac{12}{(1+n)} \left[ \frac{\text{جـ } ٣^2}{n^3} + \frac{\text{جـ } ٢^2}{n^2} + \frac{\text{جـ } ١^2}{n} \right] - \frac{3}{(1+n)}$$

$$= \frac{12}{(1+25) \cdot 25} \left[ \frac{2 \cdot 137}{11} + \frac{2 \cdot 103}{8} + \frac{2 \cdot 85}{6} \right] - \frac{3}{(1+25)}$$

$$= ٢١٣ , .$$

وبما أن إحصائية الاختبار أقل من القيمة الحرجة (٥,٩٩١)، فلا بد من قبول فرضية العدم طالما أنه ليس هنا دليل كافٍ لرفضها.  
فيما يلي برنامج لاختبار مجموع الرتب لأكثر من عيتين بطريقة كروسكال واليس التي سبق شرحها . تستخدم في هذا البرنامج البيانات المستخدمة في المثال (٩,٧) السابق، وباستخدام إحصائية الاختبار :

$$Z = UV - W$$

حيث :

$$U = \frac{12}{N(N+1)}$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3$$

$N_1, N_2, N_3$  = أحجام العينات

$$V = \sum T_{(i)}^2 / N(i) = \text{مجموع مربعات الرتب على الأحجام}$$

$$W = 3(N+1)$$

```

10 REM برنامج لاختبار مجموع الرتب لأكثر من عيتين
20 REM KRUSKAL-WALLIS H-TEST
30 DIM A(6),B(8),C(11),X(25),Y(25),F(6),H(8),M(11)
40 T1=0 REM USED TO SUM RANKS OF A
50 T2=0 REM USED TO SUM RANKS OF B
60 T3=0 REM USED TO SUM RANKS OF C
70 READ N1,N2,N3 REM NO OF OBS. FOR A,B,C RESPECTIVELY
80 MAT READ A,B,C
90 FOR I=1 TO N1
100 X(I)=A(I)
110 NEXT I
120 FOR I=N1+1 TO N1+N2
130 X(I)=B(I-N1)
140 NEXT I
150 FOR I=N1+N2+1 TO N1+N2+N3
160 X(I)=C(I-N1-N2)
170 NEXT I
180 MAT A=ASORT(A) REM SORT MATRIX A
190 MAT B=ASORT(B) REM SORT MATRIX B
200 MAT C=ASORT(C) REM SORT MATRIX C
210 MAT X=ASORT(X) REM SORT MATRIX X
220 C2=1
230 S=1
240 FOR I=2 TO N1+N2+N3
250 IF X(I) = X(I-1) THEN 250 ELSE GOSUB 740
260 S=S+1
270 C2=C2+1
280 NEXT I
290 I=N1+N2+N3+1
300 GOSUB 740
310 FOR I=1 TO N1
320 FOR J=1 TO N1+N2+N3
330 IF A(I)=X(J) THEN 340

```

```

340 F(I)=Y(J)
350 T1=T1+F(I)
360 NEXT I
370 FOR I=1 TO N2
380 FOR J=1 TO N1+N2+N3
390 IF B(I)=X(J) THEN 410
400 NEXT J
410 H(I)=Y(J)
420 T2=T2+H(I)
430 NEXT I
440 FOR I=1 TO N3
450 FOR J=1 TO N1+N2+N3
460 IF C(I)=X(J) THEN 480
470 NEXT J
480 M(I)=Y(J)
490 T3=T3+M(I)
500 NEXT I
505 N=N1+N2+N3
510 PRINT USING 630
515 PRINT USING 620
520 PRINT USING 630
530 PRINT
540 FOR I=1 TO N1
550 PRINT TAB(7);M(I);TAB(17);C(I);TAB(26);H(I);TAB(34);B(I);
560 PRINT TAB(44);F(I);TAB(53);A(I);TAB(61);I
570 NEXT I
580 FOR I=N1+1 TO N2
590 PRINT TAB(7);M(I);TAB(17);C(I);TAB(26);H(I);TAB(34);B(I);TAB(61);I
600 NEXT I
610 FOR I=N2+1 TO N3
620 PRINT TAB(7);M(I);TAB(17);C(I);TAB(61);I
630 NEXT I
640 PRINT USING 640
650 PRINT USING 650 T3,T2,T1
660 :
670 :
680 :
690 :
700 :
710 :
720 :
730 :
740 :
750 :
760 :
770 :
780 :
790 :
800 :
810 :
820 :
830 :
840 :
850 :
860 :
870 :
880 :
890 :
900 :
910 :
920 :
930 :
940 :
950 :
960 :
970 :
980 :
990 :

```

### المخرجات

ممسلسل	طريقة ١ الرتبة	طريقة ٢ الرتبة	طريقة ٣ الرتبة
1	73	5	2
2	79	9	3
3	82	12	6
4	86	16	8
5	88	18	11
6	95	25	13
7			15
8			17
9			19
10			21
11			22
			137.0

احصائيه الاختبار = 0.2134



## ٢ - ٥ اختبار فروقات الرتب للأزواج المتقارنة

(Wilcoxon Matched Pair Signed Test)

الاختلاف الأساسى بين العينتين هنا، والعينتين فى اختبار مجموع الرتب الوارد فى (٣-٣)، هو أن العينة الأولى مستقلة عن الثانية فى اختبار مجموع الرتب، بينما تكون العينة الأولى هنا مرتبطة بالثانية بسبب توحيد مصدر البيانات لكل زوج. ذلك لأن التجربتين تجريان على نفس الحقل (الفرد).

فقياس فاعلية الأفلام التليفزيونية مقارنة بالمحاضرات يستدعى أخذ عينتين من المتدربين إذا كان الأسلوب المتبع فى الاختبار هو مجموع الرتب لعينتين، وبعد أن يتم تدريب كل عينة (مجموعة) بمعزل عن المجموعة الأخرى يتم رصد الدرجات الخاصة بالتقييم لتدريب كل مجموعة. أما إذا اتبعت طريقة اختبار فروقات الرتب للأزواج المتقارنة، فيدرب كل فرد من أفراد عينة واحدة بالطريقتين (الأفلام والمحاضرات)، وترصد الدرجات الخاصة بكل طريقة. والمثال التالى يوضح حالة تطبيقية لاختبار فروقات الرتب.

### مثال (٨، ٩) :

استجلب قسم للنسخ آلة جديدة؛ لأنها أكثر كفاءة من النوع المستخدم فى ذلك القسم حسب رأى مدير الإدارة التى يتبع لها ذلك القسم، إلا أن رئيس القسم أراد أن يقيس كفاءتها فى السرعة، فاختار عينة عشوائية من ١٦ ناسخاً، ودوّن سرعة كل منهم على كل من الآتين فى الدقيقة الواحدة، فحصل على النتائج المبينة بالجدول رقم (١٤) التالى. فهل هناك دليل بمستوى معنوية ٠٥ و٠ على أن الآلة الجديدة أفضل من القديمة؟

### الحل :

يبدو واضحاً أن القرار يعتمد على الفرق بين سرعتين على كل آلة بالنسبة لكل شخص؛ لذلك فقد سُجّلت تلك الفروقات فى العمود الثالث بالجدول (١٤) التالى.

بيد أن الناسخين ٨، ٩، ١١، ١٣ تساوت سرعاتهم على الآتين، وأصبح الفرق معدوماً؛ لذلك لا بد من استبعادهم من الخطوات التالية؛ لأنهم لا يعطون دليلاً على ميزة أى من الآتين على الأخرى.

### جدول (١٤)

سرعة كل ناسخ من أفراد العينة العشوائية على كل من الآلتين والفرق بين السرعتين .

الفرق = الجديدة - الحالية	عدد الكلمات / الدقيقة على الآلة الجديدة	عدد الكلمات / الدقيقة على الآلة الحالية	السرعة / في الدقيقة رقم الناسخ
١٤	٤٥	٣١	١
٢	٧٠	٦٨	٢
٢-	٥١	٥٣	٣
١-	٤٦	٤٧	٤
٢	٩٣	٩١	٥
١	٣٧	٣٦	٦
٨	٨٠	٧٢	٧
صفر	٥١	٥١	٨
صفر	٧٤	٧٤	٩
١٠	٤٩	٣٩	١٠
صفر	٨٦	٨٦	١١
١١	٧٣	٦٢	١٢
صفر	٤٩	٤٩	١٣
٣-	٨٠	٨٣	١٤
٣	٧٨	٧٥	١٥
٥	٨٦	٨١	١٦

ترتب القيم المطلقة للفروقات (دون اعتبار للإشارة) ترتيباً تصاعدياً بعد استبعاد المشاهدات ذات الفروقات المعدومة ، ليصبح عدد المشاهدات ١٢ ، ثم تحول المراتب إلى رتب على أن تكون إشارة الرتبة هي نفس إشارة الفرق ، وذلك لمعرفة مجموع الرتب الموجبة ، ومجموع الرتب السالبة ، كما هو موضح بالجدول (١٥) التالي .

**جدول (١٥)**  
الترتيب والرتب للفروقات

رقم التاسخ	الفروقات	الفروقات المطلقة	ترتيب الفروقات المطلقة	رتب الفروقات المطلقة	الرتب بإشارات الفروقات	
					الموجبة	السالبة
٤	١ -	١	١	١,٥	١,٥	١,٥ -
٦	١	١	٢	١,٥	١,٥	
٢	٢	٢	٣	٤,٠	٤	
٣	٢ -	٢	٤	٤,٠	٤	٤ -
٥	٢	٢	٥	٤,٠	٤	
١٤	٣ -	٣	٦	٦,٥	٦,٥	٦,٥ -
١٥	٣	٣	٧	٦,٥	٦,٥	
١٦	٥	٥	٨	٨,٠	٨	
٧	٨	٨	٩	٩,٠	٩	
١٠	١٠	١٠	١٠	١٠,٠	١٠	
١٢	١١	١١	١١	١١,٠	١١	
١	١٤	١٤	١٢	١٢,٠	١٢	
المجموع			٧٨	٧٨	٦٦	١٢ -

يلاحظ من الجدول (١٥) السابق أن رتب الفروقات المتساوية هي متوسط ترتيباتها، كما أن مجموع رتب الفروقات المطلقة هو مجموع ترتيب تلك الفروقات ، فإذا كانت :

١ = مجموع الرتب الموجبة .

٢ = مجموع الرتب السالبة .

ن = عدد المفردات التي لا تساوى فروقاتها أصفاً .

فإن :

$$(١٧) \quad ١ + |٢| = \frac{ن}{٢} (٢ + ن)$$

$$(١ + ١٢) \frac{١٢}{٢} = |١٢ -| + ٦٦$$

$$٧٨ =$$

ولو أن الفرق بين الآتين ضعيف لما اختلف الفرق بين مجموع الرتب الموجبة والسالبة عن الصفر، بمعنى أنها يقتسمان مجموع الرتب ، أو لا يكون بعد كل منها عنه كبيراً ، إذ تصبح

$$\frac{78}{2} = |L| = 1$$

$$39 =$$

إذا فإحصائية الاختبار (ل) هي  $L$  أول  $L$  أيها أصغر دون اعتبار للإشارة ويكون حدها الأعلى  $\frac{N}{2}(1+N)$ ، بمعنى أن :

$$L \geq \frac{N}{2}(1+N)$$

أما الحد الأدنى لها فهو الذي يبينه جدول (١٦) التالي ، وعليه تقبل فرضية العدم إذا كانت القيمة المطلقة لأصغر المجموعين من الرتب (ل) في الفترة :

$$(18) \quad L \leq \frac{N}{2}(1+N) \quad (\text{القيمة المستخرجة من جدول (١٦) التالي})$$

$$\text{فقيمة } \frac{N}{2}(1+N)$$

$$\frac{78}{2} = \text{في المثال}$$

$$39 =$$

أما القيمة المستخرجة من جدول (١٦) عند :

$$N = 12$$

$$A = 0,05$$

فتساوى ١٧ لأن الاختبار (الفرضية البديلة) ذو اتجاه واحد. بيد أن إحصائية الاختبار (أصغر المجموعين من الرتب) :

$$L = 12$$

وبما أن إحصائية الاختبار لا تقع ضمن الفترة ١٧ — ٣٩ فلا بد من رفض فرضية العدم ، وقبول الفرضية البديلة . أى أن هناك دليلاً بمستوى معنوية ٥% على أن الآلة الجديدة أسرع من القديمة ؛ لأن الفروقات الموجبة هي الأكثر .

الجدير بالذكر أن الجدول (١٦) لا يشمل جميع أحجام العينات (ن) المتقارنة، فإذا لم يجد القارىء قيمة ن مبوبة بالجدول (١٦) يمكنه استخدام الإحصائية التقريبية التى تتبع التوزيع الطبيعى (ى). وهذه الإحصائية هى :

$$(١٩) \quad \frac{(س - ل - \frac{1}{2})}{ع} = \text{ى}$$

حيث :

$$(٢٠) \quad \frac{ن(١ + ن)}{٤} = س$$

$$(٢١) \quad \frac{س(١ + ن)}{٦} \sqrt{\frac{ن(١ + ن)}{٤}} = ع$$

وبعد حساب إحصائية الاختبار (ى) من المعادلة السابقة تستخرج القيمة الحرجة من جدول التوزيع الطبيعى بالملحق (١).

البرنامج التالى يقوم باختبار فروقات الرتب للأزواج المتقارنة بطريقة ويلكوكسون مستخدماً فى هذا المثال البيانات الواردة بالمثال (٨ ، ٩) السابق، حيث إحصائية الاختبار هى (ل) التى تساوى مجموع الرتب الموجبة أو السالبة أيهما أصغر.

```

10 REM WILCOXON MATCHED PAIR SIGNED TEST
11 REM احتساب فروقات الزوج المتطابقة
20 DIM A(16),B(16),C(16),Y(16),D(16),E(16)
30 K=0 REM USED TO COUNT NON-ZERO OBS.
40 L1=0 REM USED TO SUM +VE. RANK DIFFERENCES.
50 L2=0 REM USED TO SUM -VE. RANK DIFFERENCES.
60 S=0 REM USED TO SUM ABS. DIFFERENCES.
70 F=0 REM USED TO SUM RANKS.
80 READ N REM NO OF PAIRED OBSERVATIONS
90 FOR I=1 TO N
100 READ A(I),B(I)
110 IF A(I)-B(I)=0 THEN 150
120 K=K+1
130 C(K)=A(I)-B(I)
140 NEXT I
150 FOR I=1 TO K-1
160 FOR J=I+1 TO K
170 IF ABS(C(I))<ABS(C(J)) THEN 220
180 T=C(I)
190 C(I)=C(J)
200 C(J)=T
210 NEXT J
220 D(I)=ABS(C(I))
230 NEXT I
240 C2=1
250 FOR I=2 TO K
260 IF D(I) <> D(I-1) THEN GOSUB 810
270 S=S+1
280 C2=C2+1
290 NEXT I
300 GOSUB 810
310 FOR I=1 TO K
320 IF C(I)>0 THEN L1=L1+E(I) ELSE L2=L2+E(I)
330 NEXT I
340 REM OUTPUT PART
350 REM البيانات الاصلية
360 PRINT USING 490
370 PRINT USING 470
380 PRINT USING 480
390 PRINT USING 490
400 FOR I=1 TO N
410 PRINT USING 500,A(I)-B(I),B(I),A(I),I
420 NEXT I
430
440 PRINT
450
460 PRINT
470 : الفروق
480 : السرعة/دقيقة
490 : الالة الجديدة
500 : #####
510 REM البيانات المجموعه
520 PRINT USING 720
530 PRINT USING 730
540 PRINT USING 740
550 PRINT
560 FOR I=1 TO K
570 PRINT USING 750,E(I),I,D(I),C(I),I
580 S=S-E(I)
590 F=F+1
600 NEXT I
610 PRINT
620 PRINT USING 760
630 PRINT
640 PRINT USING 770,S,F
650 PRINT
660 PRINT USING 780,L1
670 PRINT USING 790,L2
680 PRINT
690 IF ABS(L1)<ABS(L2) THEN PRINT USING 800,ABS(L1) ELSE PRINT USING 800,ABS(L2)
700 PRINT
710 STOP
720 : الفروق
730 : ترتيب الفروق
740 : الفروق
750 : الفروق
760 : #####
770 : #####
780 : #####
790 : #####
800 : #####
810 REM RANK SUBROUTINE
820 Q=S1/C2
830 FOR G=C2 TO I-1
840 E(G)=Q
850 NEXT G
860 C2=0
870 S1=0
880 RETURN
890 DATA 16,31,45,68,70,53,51,47,46,91,93,36,37,72,80,51,51
900 DATA 74,74,39,49,86,86,62,73,49,49,83,80,75,78,81,86
910 END

```



**جدول (١٦) \*:**

الحدود الدنيا لإحصائيات اختبارات فروقات الرتب للأزواج المتقارنة (ل)  
 ١ = اختباراً باتجاه واحد.  
 ٢ = اختباراً باتجاهين.

٠.١=١ ٠.٠٥=١	٠.١٥=١ ٠.٠٧٥=١	٠.٢=١ ٠.١=١	٠.٣=١ ٠.١٥=١	٠.٤=١ ٠.٢=١	٠.١٠=١ ٠.٠٥=١	٠.١٥=١ ٠.٠٧٥=١	ن
						٠	٤
					٠	١	٥
			٠	٠	٢	٢	٦
	٠	٠	١	٢	٣	٤	٧
٠	١	٢	٣	٣	٥	٧	٨
١	٣	٤	٥	٥	٨	٩	٩
٣	٥	٦	٧	٨	١٠	١٢	١٠
٥	٧	٨	٩	١٠	١٣	١٦	١١
٧	٩	١١	١٢	١٣	١٧	١٩	١٢
٩	١٢	١٤	١٦	١٧	٢١	٢٤	١٣
١٢	١٥	١٨	١٩	٢١	٢٥	٢٨	١٤
١٥	١٩	٢١	٢٣	٢٥	٣٠	٣٣	١٥
١٩	٢٣	٢٦	٢٨	٢٩	٣٥	٣٩	١٦
٢٣	٢٧	٣٠	٣٣	٣٤	٤١	٤٥	١٧
٢٧	٣٢	٣٥	٣٨	٤٠	٤٧	٥١	١٨
٣٢	٣٧	٤١	٤٣	٤٦	٥٣	٥٨	١٩
٣٧	٤٣	٤٧	٥٠	٥٢	٦٠	٦٥	٢٠
٤٢	٤٩	٥٣	٥٦	٥٨	٦٧	٧٣	٢١
٤٨	٥٥	٥٩	٦٣	٦٥	٧٥	٨١	٢٢
٥٤	٦٢	٦٦	٧٠	٧٣	٨٣	٨٩	٢٣
٦١	٦٩	٧٤	٧٨	٨١	٩١	٩٨	٢٤
٦٨	٧٦	٨٢	٨٦	٨٩	١٠٠	١٠٥	٢٥
٧٥	٨٤	٩٠	٩٤	٩٨	١١٠	١١٨	٢٦
٨٣	٩٢	٩٩	١٠٣	١٠٧	١١٩	١٢٨	٢٧
٩١	١٠١	١٠٨	١١٢	١١٦	١٣٠	١٣٨	٢٨

\* المصدر : Isabel S, Patehet, Statistical Methods for Managers and. Administrators, VNR ; New York, 1982 ; page (359)



ن	٠.١٥=٢ ٠.٠٧٥=١	٠.١٠=٢ ٠.٠٥=١	٠.١٤=٢ ٠.٠٧=١	٠.١٥=٢ ٠.٠٥=١	٠.١٠=٢ ٠.٠٥=١	٠.١٤=٢ ٠.٠٧=١	٠.١٥=٢ ٠.٠٥=١
٢٩	١٥٠	١٤٠	١٢٦	١٢٢	١١٧	١١٠	١٠٠
٣٠	١٦١	١٥١	١٣٧	١٣٢	١٢٧	١٢٠	١٠٩
٣١	١٧٣	١٦٣	١٤٧	١٤٣	١٣٧	١٣٠	١١٨
٣٢	١٨٦	١٧٥	١٥٩	١٥٤	١٤٨	١٤٠	١٢٨
٣٣	١٩٩	١٨٧	١٧٠	١٦٥	١٥٩	١٥١	١٣٨
٣٤	٢١٢	٢٠٠	١٨٢	١٧٧	١٧١	١٦٢	١٤٨
٣٥	٢٢٦	٢١٣	١٩٥	١٨٩	١٨٢	١٧٣	١٥٩
٤٠	٣٠٢	٢٨٦	٢٦٤	٢٥٧	٢٤٩	٢٣٨	٢٢٠
٥٠	٤٨٧	٤٦٦	٤٣٤	٤٢٥	٤١٣	٣٩٧	٣٧٣
٦٠	٧١٨	٦٩٠	٦٤٨	٦٣٦	٦٢٠	٦٠٠	٥٦٧
٧٠	٩٩٥	٩٦٠	٩٠٧	٨٩١	٨٧٢	٨٤٦	٨٠٥
٨٠	١٣١٨	١٢٧٦	١٢١١	١١٩٢	١١٦٨	١١٣٦	١٠٨٦
٩٠	١٦٨٨	١٦٣٨	١٥٦٠	١٥٣٧	١٥٠٩	١٤٧١	١٤١٠
١٠٠	٢١٠٥	٢٠٤٥	١٩٥٥	١٩٢٨	١٨٩٤	١٨٥٠	١٧٧٩

### ٣ = ٦ اختبار التباين لرتب أكثر من عينتين مترابطتين (Friedman Two Way Analysis of Variance):

تكون البيانات التسلسلية هنا في شكل مجموعات مترابطة لا يقل عددها عن ثلاث مجموعات لكل مشاهدة، وهي من هذا المفهوم عبارة عن امتداد للبيانات التي يطبق عليها اختبار فروق الرتب للأزواج المتقارنة الوارد في (٣ - ٥).

يبد أنها تبدو وكأنها في حالة تشابه تام مع البيانات التي طبق عليها اختبار المجموعات المترابطة للملاحظات الوارد في (٢ - ٣)، إلا أن الاختلاف الرئيسي بين النوعين هو أن اختبار المجموعات المترابطة للملاحظات لا يمكن تطبيقه إلا على البيانات الاسمية التي تصنف على خاصية معينة، كالإجابة بنعم أو لا، فعال أو غير فعال؛ ذكر أو أنثى؛ ولذلك يتم ترميزها بصفر أو واحد.

أما البيانات التي يطبق عليها هذا الاختبار فتكون على مقياس تسلسلي لمجموعات مترابطة؛ لأنها تخص نفس الحقل أو الفرد، ولذلك يبدأ هذا الاختبار بترتيب البيانات لكل فرد (حقل)

برتب حسب الأفضلية. وبذا يكون الترتيب داخلياً لكل فرد باعتبار أنه مستقل عن بقية الأفراد. والمثال التالي يشبه إلى حد كبير مثال (٣) الوارد في (٢ - ٣) لتوضيح الفرق بين مجالى تطبيق الاختبارين.

### مثال (٩, ٩) :

قام ثلاثة مدربين بتقديم موضوع معين إلى عينة عشوائية حجمها ١٥ متدرباً بعد أن تم تقسيم ذلك الموضوع إلى ثلاث وحدات تدريبية غير متداخلة. هذا، وقد تم تقديم الوحدة الأولى بمحاضرات فقط، بينما كانت وسيلة التدريب للوحدة الثانية هي الأفلام التليفزيونية، واستخدم المدرب الثالث في تقديم وحدته بعض المحاضرات مع أفلام تليفزيونية. كانت هناك تقييمات تتم عند نهاية كل وحدة، وكانت الدرجة القصوى هي ١٠ درجات، والجدول (١٧) التالي يوضح تقديرات المتدربين. فهل تختلف الطرق الثلاث من حيث مستوى الفاعلية؟ (مستوى المعنوية ٥٪).

الوسيلة رقم المتدرب	محاضرات	تليفزيون	محاضرات + تليفزيون
١	٩	٨	١٠
٢	٨	٥	٤
٣	٤	٧	٥
٤	٦	٨	٩
٥	١	٢	٥
٦	٣	صفر	٢
٧	٤	٦	٨
٨	٨	٤	٦
٩	٦	١٠	٧
١٠	٥	٣	٤
١١	٧	٢	٦
١٢	٢	٦	٥
١٣	٥	٤	٧
١٤	٧	٦	٣
١٥	٣	٥	١

### جدول (١٧)

التقييمات الخاصة بالأفراد  
العينة البالغ حجمها  
١٥ متدرباً

### الحل :

ف ب : لا يوجد فرق جوهري بين أوساط الطرق الثلاث .  
 ف ١ : هناك فرق جوهري بين أوساط الطرق فيها بينها .  
 ١ = ٥ . .

افرض أن :

ن = عدد الوحدات المكونة لكل عينة ، وهي تساوى ١٥ في هذا المثال .

د = عدد العينات المترابطة ، وهي تساوى ثلاث عينات في هذا المثال .

فإذا تم ترتيب درجات كل متدرب ترتيباً تصاعدياً ، بحيث تصبح رتبته في أقل وحدة تساوى واحداً وتساوى اثنين في الوحدة التالية ، وثلاثة في أعلى وحدة .

الوسيلة رقم المتدرب	محاضرات	تليفزيون	محاضرات + تليفزيون
١	٢	١	٣
٢	٣	٢	١
٣	١	٣	٢
٤	١	٢	٣
٥	١	٢	٣
٦	٣	١	٢
٧	١	٢	٣
٨	٣	١	٢
٩	١	٣	٢
١٠	٣	١	٢
١١	٣	١	٢
١٢	١	٣	٢
١٣	٢	١	٣
١٤	٣	٢	١
١٥	٢	٣	١
المجموع	٣٠	٢٨	٣٢

### جدول (١٨)

الرتب للتقييحات

فإذا كانت :

جر = مجموع رتب العينة ، بمعنى أنه في هذا المثال :

$$ج١ = ٣٠$$

$$ج٢ = ٢٨$$

$$ج٣ = ٣٢$$

فإحصائية الاختبار هي :

$$ك = \frac{12}{N(D+1)} \sum ج_r^2 - 3 \frac{N(N+1)}{2} \quad (٢٢)$$

وهي تتبع توزيع مربع كاي على (د - ١) درجات حرية . لذلك تستخرج القيمة الحرجة (المجدولة) من جدول توزيع مربع كاي بالملحق (٣) بمستوى المعنوية المحدد ، ودرجات حرية أقل من عدد العينات بوحدة .

إذا فالقيمة الحرجة الخاصة بالمثال السابق تستخرج من جدول توزيع مربع كاي بالملحق رقم (٣) على درجتى حرية (٣ - ١) وبمستوى معنوية ٥٪ وهي تساوى ٥,٩٩ . أما إحصائية الاختبار فهي :

$$ك = \frac{12}{٤ \times ٣ \times ١٥} - \frac{(٢٣٢ + ٢٢٨ + ٢٣٠)}{٤ \times ١٥ \times ٣} = ٠,٥٣$$

وبما أن إحصائية الاختبار أقل من القيمة الحرجة ، فليس هناك ما يمنع قبول فرضية العدم بمستوى معنوية ٥٪ ، بمعنى أنه لا يوجد دليل على وجود فرق جوهري بين الثلاث طرق .

البرنامج التالى يقوم باختبار التباين للرتب لأكثر من عيتين مترابطتين ، وهو هنا يقوم باختبار البيانات الواردة بالمثال (٩ ، ٩) السابق بإحصائية الاختبار :

$$K = \frac{12}{ND(D+1)} \left[ P_1^2 + R_1^2 + Q_1^2 \right] - 3 \left[ N(D+1) \right]$$

حيث :

$X_1$  = وسط العينة الأولى

$X_2$  = وسط العينة الثانية

$B = CA$

$C = ٢,٠ = (٢ - ٢ + ١,٠)$  قيمة ت المجدولة على

$$A = \left[ \frac{(N_1 - 1) V_1 + (N_2 - 1) V_2}{N_1 + N_2 - 2} \right] \left[ \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right]$$

$N_1$  = حجم العينة الأولى

$N_2$  = حجم العينة الثانية

$V_1$  = تباين العينة الأولى

$V_2$  = تباين العينة الثانية

```

10 REM      برنامج لحساب حدود الثقة للفرق بين وسطين في حالة
20 REM      تساوي التباينين للمجتمعين مع عدم معرفتهما
30 READ N1,N2,X1,X2,V1,V2,C
40 DATA 25,40,6000,5300,10,8,2
50 V1=V1*V1
60 V2=V2*V2
70 A=((N1-1)*V1+(N2-1)*V2)/(N1+N2-2)*(1/N1+1/N2)
80 X=ABS(X1-X2)
90 B=C*SQR(A)
100 L=X-B      REM الحد الأدنى
110 H=X+B      REM الحد الأعلى
120 PRINT TAB(20);L;'= الحد الأدنى'
130 PRINT
140 PRINT TAB(20);H;'= الحد الأعلى'
150 PRINT
999 END

```

المخرجات

-----

695.5049 = الحد الأدنى

704.4949 = الحد الأعلى

#### ٤ - اختبارات الاستقلال بجدول التوافق (Contingency Tables) :

يجب أن هذا الأسلوب الهام كآخر موضوع في الاختبارات المعلمية واللامعلمية ؛ لأنه يستخدم لجميع أنواع البيانات سواء اسمية أو تسلسلية أو مرحلية أو نسبية ، فإذا تم تقسيم المتغيرات إلى عدد من الصفوف (ص) وعدد من الأعمدة (ع) ، وفقاً لأسلوبين مختلفين يعتمد كل منهما على متغير خاص به للتصنيف ، فالنتائج هو جدول ذو اتجاهين قد تكون صفوفه اسمية وأعمدته تسلسلية مثلاً .

يسمى ذلك الجدول ذو الاتجاهين بجدول التوافق أو جدول الاقتران (Contingency Table) . هذا ، ويشترط أن يكون أقل عدد من الصفوف صفيين ، وأقل عدد من الأعمدة عمودين ، ويعبر عنه بأنه جدول توافق ص × ع . وعليه يكون أصغر جدول توافق هو ٢ × ٢ .

يستخدم اختبار الاستقلال بالجدول التوافقي بمستوى معنوية محدد لاختبار فرضية العدم ، التي تنص دائماً على استقلال الصفوف عن الأعمدة . بمعنى أنه لا توجد صلة جوهرية بين صفة التصنيف الأفقي ، وصفة التصنيف الرأسى ، كأن تقول إنه لا توجد علاقة بين التدخين والاصابة بسرطان الرئة إذا قسم أفراد العينة إلى مدخنين وغير مدخنين أفقياً ، وقسموا إلى مصابين وغير مصابين بسرطان الرئة رأسياً ، كما هو مبين في الجدول (٩) التالى .

#### جدول (٩)

جدول توافقى لعينة عشوائية من ١٠٠ شخص من هياة امراض الصدرية (جدول ٢×٢)

صفة التصنيف الرأسية	عدد المصابين بسرطان الرئة	عدد غير المصابين بسرطان الرئة	مجموع الصفوف
صفة التصنيف الأفقية	عدد الذين يدخنون	عدد الذين لا يدخنون	مجموع الأعمدة
٢٢	٢٥	٢١	٤٣
٢٥	٣٢	٥٧	٨٧
٤٧	٥٣	١٠٠	

وأما الفرضية البديلة فتعنى على وجود صلة بين الصفتين ، بمعنى أن التدخين يزيد من احتمال الاصابة بسرطان الرئة .

لقد ورد في الباب (٢-٢) الخاص باختبارات حسن المطابقة للبيانات الاسمية لعينة واحدة أنه إذا كانت :

$k_r =$  التكرار الفعلى (القيمة العينية) داخل كل خلية (Cell)

$k'_r =$  التكرار المتوقع (القيمة النظرية) داخل تلك الخلية .

$d =$  عدد المجموعات أو الخلايا (Cells)

فالإحصائية :

$$(٦) \quad \chi^2 = \frac{\sum_{r=1}^d (k_r - k'_r)^2}{k'_r}$$

تتبع توزيع مربع كاي على  $(d - 1)$  درجات حرية .

ولعل الإضافة الجديدة هنا هي أن عدد الخلايا  $(d)$  أصبح ناتج ضرب عدد الصفوف  $(ص)$

في عدد الأعمدة  $(ع)$  . أى أن :

$$d = ص \times ع$$

وعليه تكون إحصائية الاختبار هنا هي :

$$(٦) \quad \chi^2 = \frac{\sum_{r=1}^d (k_r - k'_r)^2}{k'_r}$$

وهي تتبع توزيع مربع كاي على  $(ص - 1) \times (ع - 1)$  درجات حرية . فإذا كانت إحصائية الاختبار أقل من القيمة المجدولة قبلت فرضية العدم القائلة بأنه لا توجد صلة بين صفة التصنيف الأفقى والرأسى بمستوى المعنوية المحدد . أما إذا زادت إحصائية الاختبار المحسوبة من الجدول التوافقى على القيمة المجدولة بتوزيع مربع كاي ، فسوف ترفض فرضية العدم ، وتقبل الفرضية البديلة بالمستوى المحدد .

بيد أن القيمة المتوقعة  $(k'_r)$  تكون دائماً غير معلومة ، إلا أنه ، بناء على قاعدة الدفاع عن فرضية العدم ما لم يثبت خلاف ذلك ؛ فيكون التكرار المتوقع داخل كل خلية في حالة صحة فرضية العدم هو ناتج ضرب نسبة مجموع تكرارات الصف الذى تتبعه تلك الخلية إلى المجموع الكلى للتكرارات في مجموع تكرارات العمود الذى تتبعه تلك الخلية .  
بمعنى أن :

$$(٢٣) \quad k'_r = \frac{\text{مجموع صف الخلية} \times \text{مجموع عمودها}}{\text{المجموع الكلى للتكرارات}}$$

**مثال (٩,١٠) :**

أخذت عينة عشوائية من مرضى قسم الباطنية بأحد المستشفيات، وتم تصنيفهم إلى مدخنين وغير مدخنين من جهة، ومصابين وغير مصابين بارتفاع ضغط الدم من جهة أخرى. فهل يعتبر التدخين سبباً لارتفاع ضغط الدم بمستوى معنوية ٠,٠١ ؟ والبيانات للعينة البالغ حجمها ٥٠ مريضاً هي :

**جدول (٢٠)**

جدول توافقى ٢×٢ لعينة من مرضى قسم الباطنية بأحد المستشفيات

صفة التصنيف	يدخنون	لا يدخنون	مجموع الصفوف
ضغط الدم مرتفع	١٢	١١	٢٣
ضغط الدم غير مرتفع	٨	١٩	٢٧
مجموع الأعمدة	٢٠	٣٠	٥٠

**الحل :**

يستخدم جدول التكرارات الفعلية لاستخراج جدول التكرارات المتوقعة باستخدام القاعدة :

$$ك_r(\text{المتوقعة}) = \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{المجموع الكلى}} \quad (٢٣)$$

والجدول التالى يوضح ذلك .

**جدول (٢١)**

حساب التكرارات المتوقعة (ك<sub>ر</sub>) من جدول (٢٠) الخاص بالتكرارات الفعلية (ك<sub>ر</sub>)

صفة التصنيف	يدخن	لا يدخن	المجموع
ضغط الدم مرتفع	$٩,٢ = \frac{٢٠ \times ٢٣}{٥٠}$	$١٣,٨ = ٣٠ \times \frac{٢٣}{٥٠}$	٢٣
ضغط الدم غير مرتفع	$١٠,٨ = ٢٠ \times \frac{٢٧}{٥٠}$	$١٦,٢ = ٣٠ \times \frac{٢٧}{٥٠}$	٢٧
المجموع	٢٠	٣٠	٥٠



وبلاحظ أن المجاميع الحدية لل تكرارات المتوقعة تساوى المجاميع الحدية لل تكرارات الفعلية.

أما إحصائية الاختبار

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(K_j - E_j)^2}{E_j} \quad (٦)$$

فيمكن حسابها من التكرارات بالجدول (٢٠) والجدول (٢١) :

$$\begin{aligned} \therefore \chi^2 &= \frac{(16,2 - 19)^2}{16,2} + \frac{(10,8 - 8)^2}{10,8} + \frac{(13,8 - 11)^2}{13,8} + \frac{(9,2 - 12)^2}{9,2} \\ &= ( \frac{1}{16,2} + \frac{1}{10,8} + \frac{1}{13,8} + \frac{1}{9,2} ) \chi^2(2,8) = \\ &= 2,634 = \chi^2_{2,634} \end{aligned}$$

أما القيمة الحرجة من جدول توزيع مربع كاي بالملحق وعلى (ص - ١) × (ع - ١) درجات حرية أى على (١ - ٢) × (١ - ٢) = ١ درجة حرية، وبمستوى معنوية ١٪ فتساوى ٦,٦٣.

وبما أن إحصائية الاختبار أقل من القيمة الحرجة، فليس هناك دليل كافٍ بمستوى معنوية ١٪ على وجود علاقة بين التدخين وارتفاع ضغط الدم. بمعنى أنه لا بد من قبول فرضية العدم.

تجدر الإشارة إلى أن هذا الاختبار يمكن أن يؤدي إلى نتائج خاطئة إذا زادت نسبة عدد الخلايا، التي يقل عدد تكراراتها عن خمسة تكرارات، على ٢٠٪ من العدد الكلى للخلايا. لذلك يمكن دمج الخلايا المتقاربة عند الضرورة لتحقيق ذلك الشرط، إلا أنه من الأفضل زيادة حجم العينة إذا كان ذلك ممكناً.

### مثال (٩, ١١)

البيانات التالية توضح التقديرات النهائية لعينة عشوائية حجمها مائة خريج من خريجي البرامج الإعدادية بمعهد الإدارة العامة. فهل تختلف التقديرات باختلاف البرامج؟ (مستوى المعنوية ١٪).

### جدول (٢٣)

التقديرات النهائية لعينة عشوائية من الخريجين حسب البرامج

المجموع	دراسات مالية	إدارة مستشفيات	دراسات بنكية	حاسب آلي	البرنامج / التقدير
٨	١	٤	٢	١	ممتاز
٢٣	٥	٩	٥	٤	جيد جداً
٤٤	٦	١٥	١٣	١٠	جيد
١٧	٦	٥	٤	٢	مقبول
٠٨	٠	١	٢	٥	راسب
١٠٠	١٨	٣٤	٢٦	٢٢	المجموع

$$\text{عدد الخلايا} = ٤ \times ٥ = ٢٠$$

عدد الخلايا التي يقل عدد تكراراتها عن ٥ تكرارات = ٩ خلايا، وهي أكثر من ٢٠٪ من العدد الكلي للخلايا.

يلاحظ أن هذه التكرارات محصورة بين الامتياز والجيد جداً والمقبول والراسب، لذلك يمكن ضم كل تقديرين متقاربين ليصبح الجدول ٥×٣ ويكون على نحو ما هو مبين في الجدول (٢٣) الذي يستوفي شروط تطبيق اختبار مربع كاي الخاص بالاستقلال على النحو الآتي:

### جدول (٢٣)

التقديرات النهائية لعينة عشوائية لخريجي بعض البرامج بعد دمج بعض الخلايا المتقاربة

المجموع	دراسات مالية	إدارة مستشفيات	دراسات بنكية	حاسب آلي	البرنامج / التقدير
٣١	٦	١٣	٧	٥	ممتاز / جيد جداً
٤٤	٦	١٥	١٣	١٠	جيد
٢٥	٦	٦	٦	٧	مقبول / راسب
١٠٠	١٨	٣٤	٢٦	٢٢	المجموع

ومن ثم يمكن استخراج التكرارات المتوقعة بالمعادلة

$$كُر = \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{المجموع الكلي}} \quad (٢٣)$$

### جدول (٢٤)

التكرارات المتوقعة للتقديرات النهائية لعينة الخريجين

التقدير	البرنامج	حاسب آلي	دراسات بنكية	إدارة مستشفيات	دراسات مالية	المجموع
ممتاز / جيد جداً جيد مقبول / راسب	٦,٨٢	٨,٠٦	١٠,٥٤	٥,٥٨	٣١,٠٠	
	٩,٦٨	١١,٤٤	١٤,٩٦	٧,٩٢	٤٤,٠٠	
	٥,٥٠	٦,٥٠	٨,٥٠	٤,٥٠	٢٥,٠٠	
المجموع		٢٢,٠٠	٢٦,٠٠	٣٤,٠٠	١٨,٠٠	١٠٠,٠٠

إحصائية الاختبار هي

$$\chi^2 = \sum_{r=1}^k \frac{(K_r - K'_r)^2}{K_r} \quad (٦)$$

والجدول التالي يبين فروقات  $K_r - K'_r$  والتي يجب أن تكون مجاميعها الحدية أصفاراً.

### جدول (٢٥)

( $K_r - K'_r$ ) من الجدولين (٢٣) و (٢٤)

التقدير	البرنامج	حاسب آلي	دراسات بنكية	إدارة مستشفيات	دراسات مالية	المجموع
ممتاز / جيد جداً	١,٨٢-	١,٠٦-	٢,٤٦	٠,٤٢	صفر	
جيد	٠,٣٢	١,٥٦	٠,٠٤	١,٩٢-	صفر	
مقبول / راسب	١,٥٠	٠,٥-	٢,٥-	١,٥٠	صفر	
المجموع	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	

وعليه تكون إحصائية الاختبار :

$$\chi^2 = \frac{1^2(1,5)}{4,50} + \dots + \frac{2^2(2,46)}{10,54} + \frac{1^2(1,06-)}{8,06} + \frac{1^2(1,82-)}{6,82} = 3,6$$

بذلك يكون عدد درجات الحرية لتوزيع مربع كاي بمستوى معنوية ٠,٠١ يساوى

$$(ص - ع) \times (١ - ع)$$

$$(١ - ٤) \times (١ - ٣) =$$

$$٣ \times ٢ =$$

$$٦ =$$

إذا فالقيمة الحرجة المستخلصة من جدول توزيع مربع كاي على ٦ درجات حرية، وبمستوى معنوية ١٪، تساوى ١٦,٨١.

وبما أن القيمة الحرجة أكبر من إحصائية الاختبار، فليس هناك ما يبرر رفض فرضية العدم بمستوى معنوية ١٪، وعليه فليس هناك دليل كافٍ على أن مستويات التقديرات مرتبطة ببعض البرامج دون الأخرى.

```

10 REM (1) اختبارات الاستقلال بجدول الت-ايفن
20 REM CONTINGENCY TABLES
30 DIM X(5,4), D(5,4), M(5,4), A(5,4), R(5), C(4)
40 T=0 REM USED TO SUM MATRIX ELEMENTS
50 K=0 REM TEST STATISTIC
60 READ N1,N2 REM ROWS,COLUMNS
70 FOR I=1 TO N1
80   FOR J=1 TO N2
90     READ X(I,J)
100    R(I)=R(I)+X(I,J) REM ROW TOTALS
110    C(J)=C(J)+X(I,J) REM COLUMN TOTALS
120    T=T+X(I,J) REM MATRIX TOTAL
130   NEXT J
140 NEXT I
150 PRINT USING 200
160 PRINT USING 210
170 MAT PRINT X
180 PRINT
190 PRINT
200
210
220
230 L=0
240 FOR I=1 TO N1
250   FOR J=1 TO N2
260     IF X(I,J)<5 THEN L=L+1
270   NEXT J
280 NEXT I
290 F=N1*N2
300 IF L<=F*20/100 THEN 330
310 PRINT 'عدد الخلايا التى يقل عدد تكرارها عن ٥ اكتر من ١٠٪ من'
320 PRINT 'العدد الكلى للخلايا . وعليه فلا بد من اعاده تصميم التلاميذ'
330 GOTO 999
340 FOR I=1 TO N1
350   FOR J=1 TO N2
360     M(I,J)=R(I)*C(J)/T
370     D(I,J)=X(I,J)-M(I,J)
380     B(I,J)=D(I,J)**2/M(I,J)
390   NEXT J
400 NEXT I
410 PRINT USING 460
420 PRINT USING 470
430 MAT PRINT M
440 PRINT
450 PRINT

```

#### المبيانات الاصلية

```

450 :
460 :
470 :
480 PRINT USING 640
490 PRINT USING 650
500 MAT PRINT D
510 PRINT
520 PRINT
530 :
540 :
550 PRINT ,K;' = الاحتمال
560 F=(N1-1)*(N2-1)
570 PRINT
580 PRINT ,F;' = درجات الحرية
590 PRINT
600 DATA 5,4,1,2,4,1,4,5,9,5,10,13,15,6,2,4,5,6,5,2,1,0
999 END

```

### التكرارات المتوقعة

### جدول الفروقات

### المخرجات

### البيانات الاصلية

1	2	4	1
4	5	9	5
10	13	15	6
2	4	5	6
5	2	1	0

عدد الخلايا التي يقل عدد تكراراتها عن 5 اكثر من ٢٠٪ من العدد الكلي للطلاب. وعليه فلا بد من اعاده تصميم الخلايا

```

10 REM (2) اختبارات الاستقلال بجداول التوافق
20 REM CONTINGENCY TABLES
30 DIM X(3,4), D(3,4), M(3,4), A(3,4), R(3), C(4)
40 T=0 REM USED TO SUM MATRIX ELEMENTS
50 K=0 REM TEST STATISTIC
60 READ N1,N2 REM ROWS,COLUMNS
70 FOR I=1 TO N1
80 FOR J=1 TO N2
90 READ X(I,J)
100 R(I)=R(I)+X(I,J) REM ROW TOTALS
110 C(J)=C(J)+X(I,J) REM COLUMN TOTALS
120 T=T+X(I,J) REM MATRIX TOTAL
130 NEXT J
140 NEXT I
150 PRINT USING 200
160 PRINT USING 210
170 MAT PRINT X
180 PRINT
190 PRINT
200 :
210 :
220 :
230 L=0
240 FOR I=1 TO N1
250 FOR J=1 TO N2
260 IF X(I,J)<5 THEN L=L+1
270 NEXT J
280 NEXT I
290 F=N1*N2
300 IF L<=F*20/100 THEN 330
310 PRINT 'عدد الخلايا التي يقل عدد تكراراتها عن 5 اكثر من
320 'العدد الكلي للخلايا. وعليه فلا بد من اعاده تصميم الخلايا
330 GOTO 999
340 FOR I=1 TO N1
350 FOR J=1 TO N2
360 M(I,J)=X(I,J)*C(J)/T
370 D(I,J)=X(I,J)-M(I,J)
380 B(I,J)=D(I,J)**2/M(I,J)
390 K=K+B(I,J)
400 NEXT J
410 NEXT I
420 PRINT USING 460
430 PRINT USING 470
440 MAT PRINT M
450 PRINT
460 :
470 :
480 :
490 :
500 :
510 :
520 :
530 :
540 :
550 :
560 :
570 :
580 :
590 :
600 :
610 :
620 :
630 :
640 :
650 :
660 :
670 :
680 :
690 :
700 :
710 :
720 :
730 :
740 :
750 :
760 :
770 :
780 :
790 :
800 :
810 :
820 :
830 :
840 :
850 :
860 :
870 :
880 :
890 :
900 :
910 :
920 :
930 :
940 :
950 :
960 :
970 :
980 :
990 :
END

```

#### البيانات الاصلية

#### التكرارات المتوقعة

#### جدول الفروقات

#### المخرجات

#### البيانات الاصلية

7	13	6
13	15	6
6	6	6

التكرارات المتوقعة			
5.82	8.059999	10.54	5.58
9.679999	11.44	14.96	7.919999
5.5	6.5	8.5	4.5
جدول الفروقات			
-1.82	-1.059999	2.46	.4200001
.3200006	1.56	4.000092E-02	-1.919999
-1.5	-1.5	-2.5	1.5
احصائيه الاختبار = 3.602571			
درجات الحريه = 6			

## تمارين

- ١ - حدد الفرق بين الاختبارات المعلمية واللامعلمية ، ومجالات استخدامات كل منها .
- ٢ - ماهى مزايا وعيوب الاختبارات اللامعلمية ؟
- ٣ - ماهو المقصود بحسن المطابقة ؟
- ٤ - قام باحث اجتماعى بإجراء دراسة حول البرامج التلفزيونية المفضلة لدى الرجال والنساء ، فكانت النتائج العينية على النحو الآتى :

البرنامج الجنس	الرياضية	الثقافية	الدينية	الأسرة	الأطفال
النساء	٦	٢٤	٣٨	٢٨	٢٤
الرجال	١٠	٣٠	٤٠	٥	١٥

فهل تختلف الأفضلية باختلاف الجنس بمستوى معنوية ٥٪ ؟ .

- ٥ - أرسلت إدارة التخطيط بمعهد الإدارة العامة بالرياض عدداً من الاستبيانات لعينة من خريجي البرامج الإعدادية السابقين ، وكان عدد المجيبين وغير المجيبين وتقديراتهم عند التخرج على النحو الآتى :

التقدير	مقبول	جيد	جيد جداً	ممتاز
الذين أجابوا	١٦	٥١	٤٢	٣١
الذين لم يجيبوا	١٢	١٨	١٤	٦

اختبر الفرضية القائلة بأن إعادة الاستبيان مستقلة عن التقدير عند التخرج وذلك بمستوى معنوية ١٪.

٦ - ينتج مصنع للعب الأطفال ثلاثة أنواع من اللعب ، وهى : سيارات صغيرة (سيدان) ، وشاحنات ، وقطارات .

وتنتج تلك اللعب بكميات متساوية باعتبار أن مستوى التسويق للثلاثة أنواع متساو . بيد أن مسحاً للسوق لعينة مكونة من ٣٥٠ قطعة من المبيعات قد أوضح أن عدد السيارات السيدان قد بلغ ١٦٠ ، وعدد الشاحنات ١١٠ ، بينما بلغ عدد القطارات ٨٠ فقط . فهل كان اعتقاد الإدارة صحيحاً بمستوى معنوية ٥٪؟

٧ - اختبر الفرضية فى السؤال السابق لو أن اعتقاد الإدارة هو أن الاستهلاك ٥٠٪ للسيدان ، و ٣٠٪ للشاحنات ، و ٢٠٪ للقطارات ، وكان الإنتاج بهذه النسب .

٨ - فى بحث للمشتريات استجوبت عشر إدارات مشتريات كعينة عشوائية بين تلك الإدارات . وكان المستجوب فى كل إدارة هو مديرها . ولقد طلب من المدير الإجابة بنعم أو لا على الطريقة أو الطرق التى يعتقد أنها ملائمة للأجهزة ، علماً بأنه يجوز أن يوافق على أكثر من طريقة من الطرق الثلاث وهى :

أ - الطريقة المركزية للشراء .

ب - الطريقة غير المركزية للشراء .

ج - الطريقة المرننة (المزدوجة) للشراء .

هذا ويرمز الواحد للإجابة بنعم بينما يرمز الصفر للإجابة بلا ، والإجابات هى :



رقم العينة	مركزية الشراء	لامركزية الشراء	الطريقة المرنة للشراء
١	١	٠	٠
٢	٠	٠	١
٣	٠	١	١
٤	١	٠	٠
٥	٠	٠	١
٦	٠	١	٠
٧	٠	١	٠
٨	٠	٠	١
٩	١	٠	١
١٠	٠	١	١

فهل هناك فرق جوهري بمستوى ٥٪ يدل على وجود فرق بين الطرق الثلاث حسب آراء المديرين؟ هل هناك فرق جوهري بين الطريقة المرنة والطريقة المركزية؟  
٩ - استجوبت عينة من القيادات العليا، وعينة من التنفيذيين، حول النظام الحالي لتقويم الأداء، فكانت النتائج كالآتي :

الرأى	القياديون	التنفيذيون
غير مقبول	٢	٧
لا أدري	٠	٦
مقبول	٨	١٠
جيد جداً	١٢	٣
ممتاز	٦	٢

فهل هناك فرق جوهري بمستوى معنوية ١٠٪ بين آراء القياديين والتنفيذيين؟  
١٠ - اختبر فرضية السؤال السابق لو كانت الإجابات على النحو الآتي :

الرأى	القياديون	التنفيذيون
غير مقبول	٢٠	٥٠
لا أدري	٠	٢٠
مقبول	٨٠	١٠٠
جيد جداً	١٢٠	٣٠
ممتاز	٦٠	٢٠

١١ - اختبر فرضية السؤال التاسع لو أن الآراء على النحو الآتى :

الرأى	القياديون	التنفيذيون
غير مقبول	٢	٧
لا أدرى	٠	٦
مقبول	٨	٢٣
جيد جداً	٢٢	١٤
ممتاز	٦	٣

١٢ - يقوم ثلاثة أساتذة بتدريس مادة واحدة لثلاث مجموعات مختلفة ، وبعد انتهاء البرنامج جلس جميع الطلاب فى المجموعات الثلاث لامتحان موحد ، فكانت النتائج على النحو الآتى :

الرقم	المجموعة الأولى	المجموعة الثانية	المجموعة الثالثة
١	٦٣	٧٢	٥٤
٢	٧٨	٧١	٦٥
٣	٩١	٦٨	٧٣
٤	٥٦	٨١	٨٠
٥	٧٢	٧٠	٨٣
٦	٦٥	٦٢	٧٩
٧	٧٩	٧٥	٧٢
٨	٨٦	٧٤	٦١
٩	٦٤	٨٠	٨٥
١٠	٨٤	٦٧	٥٩
١١	٩٣	٨٧	
١٢	٩٨	٩٦	
١٣		٨٢	
١٤		٨٩	

اختبر فرضية العدم القائلة بأنه لا يوجد فرق جوهري بين درجات المجموعات الثلاث بمستوى معنوية ٥٪.

١٣ - اختبر فرضية العدم فى السؤال السابق للفرق بين المجموعة الأولى والثانية .  
١٤ - اختبر فرضية العدم فى السؤال الثانى عشر للفرق بين المجموعة الأولى والثالثة .

- ١٥ - اختبر فرضية العدم في السؤال الثانى عشر للفرق بين المجموعة الثانية والثالثة .
- ١٦ - تنوى إحدى الجهات استحداث نظام التأمين الاجتماعى لعمالها، وكانت هناك ثلاثة مقترحات لنظام التأمين، بينما يقضى الاقتراح الرابع بعدم استخدام أى نظام للتأمين .
- أجريت مقابلات لعينة من العاملين فى تلك الجهة لمعرفة آرائهم حول البدائل الأربعة على أن يرصد كل شخص درجة أقصاها ١٠ درجات لأفضل طريقة .
- هل هناك فرق بين الطرق الثلاث حسب آراء العاملين بمستوى معنوية ١٠٪؟
- والبيانات هى :

رقم العامل	الطريقة الأولى	الطريقة الثانية	الطريقة الثالثة	الطريقة الرابعة (لا تأمين)
١	٦	٨	٤	٠
٢	١٠	٩	٧	٢
٣	٠	٠	٠	١٠
٤	٥	٥	٥	٥
٥	٨	٧	٣	٩
٦	٩	٨	١٠	٧
٧	٧	٧	٨	٠
٨	١٠	٠	٠	٠
٩	٥	٩	٨	٦
١٠	٣	٨	١٠	٤
١١	٠	١٠	٠	٠
١٢	٨	٦	٦	٨
١٣	٩	٨	٧	٩

- ١٧ - كانت إحدى وكالات السفر تنجز معاملاتها يدوياً، إلا أنها رغبة منها فى تطوير عملها جلبت جهازاً للحاسب الآلى، بيد أن بعض العاملين لم يستوعبوا كيفية استخدام الحاسب لإنجاز المعاملات بطريقة أسرع . والعينة العشوائية التالية توضح ذلك لعدد المعاملات اليومية قبل وبعد استخدام الجهاز، فهل هناك زيادة جوهرية فى عدد المعاملات التى تم إنجازها بمستوى ٥٪؟

الرقم	عدد المعاملات قبل الجهاز	عدد المعاملات بعد الجهاز
١	٢٥	٢٨
٢	٢٧	٣٥
٣	٢١	١٧
٤	٢٣	٢٣
٥	٣١	٣٨
٦	٢١	٢٦
٧	٢٩	٢٩
٨	٣٤	٢٨
٩	٢٣	٣٠
١٠	٢٦	٢٦
١١	٢٢	٢٧
١٢	٢٤	٣٠
١٣	٢٥	٢٩
١٤	٢١	٢٧

١٨ - استخدام البيانات الواردة بالسؤال (٤)، واكتب برنامج بيسك لإيجاد إحصائية الاختبار.

١٩ - باستخدام البيانات بالسؤال (٥) اكتب برنامج بيسك لإيجاد إحصائية الاختبار.

٢٠ - اكتب برنامج بيسك لحساب إحصائية الاختبار للفرضية بالسؤال (٨) مستخدماً نفس البيانات.

٢١ - استخدم البيانات بالسؤال (٩) لكتابة برنامج بيسك لحساب إحصائية الاختبار.

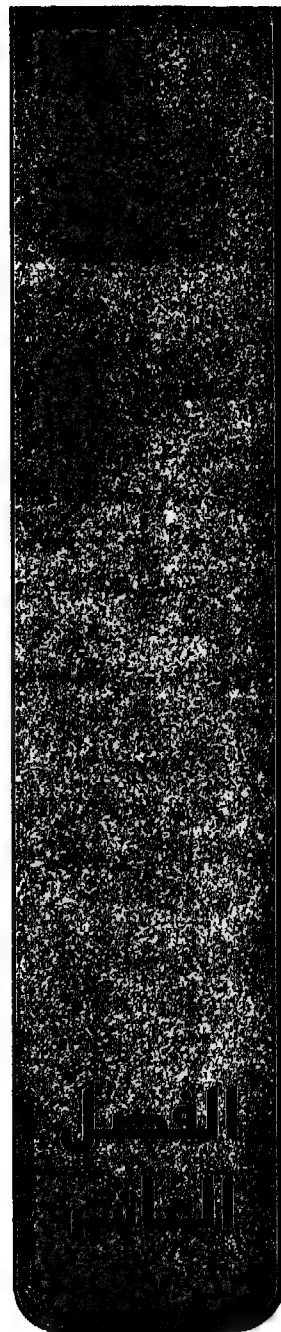
٢٢ - اكتب برنامج بيسك لحساب إحصائية الاختبار مستخدماً البيانات الواردة بالسؤال (١٢).

٢٣ - اكتب برنامج بيسك لإيجاد إحصائية الاختبار مستخدماً البيانات الواردة بالسؤال (١٦).

---

**الارتباط (CORRELATION)**

---





## الارتباط (CORRELATION)



### ١ - التفسير :

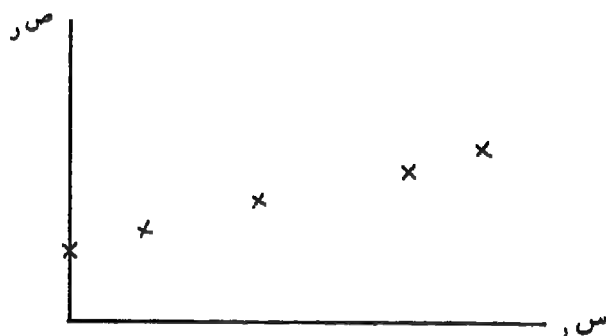
اختصت جميع الحالات السابقة بمعالجة متغير واحد، فالوسط الحسابي، أو الانحراف المعياري، أو إحصائية الاختبار يخص كلاً منها متغير واحد؛ لأن التوزيع لا يتسع لأكثر من متغير واحد. أما إذا كانت لكل قيمة من المتغير (س) قيمة أخرى تناظرها بمتغير آخر (ص) فالبيانات ذات الأزواج المرتبة تسمى بالبيانات ذات البعدين، ويسمى كل زوج منها بالمتغير العشوائي ذي البعدين. هذا، ويتبع كل متغير من المتغيرين توزيعاً خاصاً يسمى بالتوزيع الهامشي للمتغير.

### مثال (١٠، ١)

البيانات التالية تمثل متغيراً عشوائياً ذا بعدين، هما: الوزن بالأرطال، والعمر بالسنوات، لعينة عشوائية من بعض الصبية المرضى بأحد المستشفيات.

الرقم	الوزن (س)	العمر (ص)
١	٢٠	٤
٢	٢٦	٧
٣	٣٤	١١
٤	٣٨	١٣
٥	٤٢	١٥
المجموع	١٦٠	٥٠

يلاحظ من المثال (١) أن المتغيرين ( $S_r$ ،  $V_r$ ) يتزايدان في اتجاه واحد ، بمعنى أن  $V_r$  توافق  $S_r$  في تغيراتها . والرسم البياني الذي يسمى لوحة الانتشار (Scatter Diagram) يوضح ذلك .



رسم بياني (١) : لوحة الانتشار الخاصة بالمثال (١)

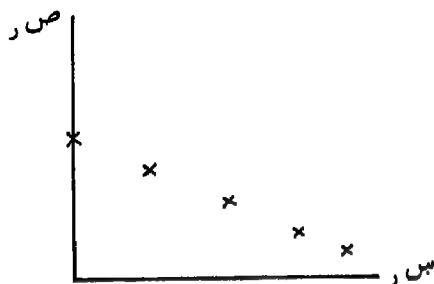
أما إذا ظلت قيم ( $S_r$ ) كما كانت عليه بينما بُدِّل اتجاه قيم المتغير ( $V_r$ ) ، بحيث تقابل أعلى قيمة له لأصغر قيمة للمتغير الأول ، وتدرجت بقية القيم على هذا النحو حتى أصبحت أصغر قيمة للمتغير ( $V_r$ ) تقابل أكبر قيمة للمتغير ( $S_r$ ) ، مثلما هو موضح في المثال (٢) التالي ، فالمجموع لكل متغير ، وكذلك الوسط الحسابي ، والانحراف المعياري يظل دون أدنى تغيير .

بيد أن اتجاه العلاقة بين المتغيرين قد تبدل تماماً وأصبح في صورة معاكسة لما هو واضح من لوحة الانتشار السابقة . وهذا ما توضحه لوحة الانتشار بالرسم البياني رقم (٢) التالي .

الرقم	$S_r$	$V_r$
١	٢٠	١٥
٢	٢٦	١٣
٣	٣٤	١١
٤	٣٨	٧
٥	٤٢	٤
المجموع	١٦٠	٥٠

مثال (٢، ١٠) : بيانات باتجاهين متعاكسين





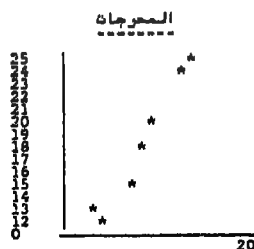
رسم بياني (٢) : لوحة الانتشار الخاصة بالمثال (٢)

البرنامج التالي مثال لكيفية استخدام عبارات بسيطة بلغة بيسك لرسم بياني . هنالك بالطبع العديد من الحزم الجاهزة والتي بإمكانها أداء أنواع أكثر صعوبة وتقدماً من المثال الوارد هنا، إلا أن هذا المثال يمكن أن يعطي فكرة عن استخدام دوائر for وعبارة PRINT TAB لتحقيق مثل هذا الرسم البياني .

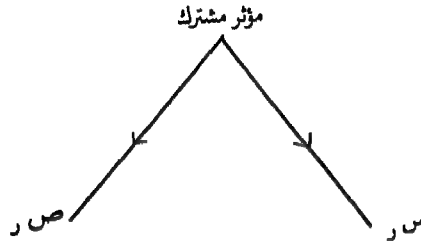
```

10 REM PROGRAM TO PLOT VALUES OF Y AGAINST X
20 DIM X(7),Y(7),A(50),B(50)
30 READ N
40 FOR I=1 TO N
50   READ X(I),Y(I)
60   Y(I)=INT(Y(I)/2+0.5) REM TRANSFORM Y TO A SMALLER SCALE
70   REM AND ROUND TO NEAREST INTEGER
80 NEXT I
90 COSUB 290 REM TO DETERMINE THE HIGHEST & LOWEST VALUES IN Y.
100 FOR I=H TO L STEP -1 REM STARTING AT HI & ENDING AT LO VALUES OF Y
110   PRINT I
120   IF A(I)>0 THEN PRINT TAB(B(I)+18);'*' ELSE PRINT
130 NEXT I
140 MAT Y=X
150 COSUB 290 REM TO DETERMINE THE HIGHEST & LOWEST VALUES IN X
160 Z=0 REM DUMMY NUMBER
170 FOR I=1 TO H
180   PRINT I
190   PRINT Y
200 NEXT I
210 PRINT
220 FOR I=1 TO H
230   PRINT I
240   PRINT Y
250 NEXT I
260 PRINT H
270 DATA 7,10,25,15,35,14,30,16,40,11,24,20,50,19,48
280 STOP
290 REM ROUTINE TO DETERMINE HIGHEST AND LOWEST VALUES
300 H=Y(1) REM القيمة العظمى
310 L=Y(1) REM القيمة الصغرى
320 FOR I=2 TO N
330   IF Y(I)>H THEN H=Y(I)
340   IF Y(I)<L THEN L=Y(I)
350 NEXT I
360 RETURN
370 REM ROUTINE TO ARRANGE VALUES OF Y IN SEQUENCE IN ANOTHER ARRAY A
380 REM AND ARRANGE CORRESPONDING VALUES OF X IN ARRAY B
390 FOR I=1 TO N
400   A(Y(I))=Y(I)
410   B(Y(I))=X(I)
420 NEXT I
430 RETURN
440 END

```



إذاً هناك مؤثر مشترك في الحالة الأولى، وهو ذو أثر في اتجاه واحد في المثال (١)، وفي اتجاهين متعاكسين في المثال (٢). والشكل التالي يوضح ذلك:



شكل (١) : مؤثر مشترك في اتجاه واحد

يعتبر التغير حول الوسط الحسابي لكل متغير هو أفضل المقاييس النسبية للزيادة أو النقصان الخاصين بأي متغير. بمعنى أن (س - س<sub>ر</sub>) تمثل تغيرات المتغير الأول، بينما تمثل (ص - ص<sub>ر</sub>) التغيرات التي تناظرها في المتغير الثاني، لذلك تكون (س - س<sub>ر</sub>) (ص - ص<sub>ر</sub>) موجبة دائماً إذا كان الأثر في اتجاه واحد، بينما يكون ناتج الضرب سالبا إذا كان المتغيرات يتأثران بطريقة متعاكسة. وعليه تكون القيمة :

$\sum (س - س_{ر})(ص - ص_{ر})$  موجبة إذا كانت العلاقة طردية، وسالبة إذا كانت العلاقة عكسية.

بيد أن القيمة تزيد بزيادة حجم العينة الثنائية (ن). ولتفادي ذلك تقسم القيمة على (ن - ١)، مثلما حدث في التباين الخاص. بمتغير واحد ليصبح الشكل النهائي لها :

$$(١) \quad \frac{\sum (س - س_{ر})(ص - ص_{ر})}{ن - ١} = ع_{س ص}$$

يلاحظ أن استبدال أي من المتغيرين في المعادلة رقم (١) يؤدي إلى المعادلة الخاصة بتباين المتغير الآخر، لذلك تسمى الإحصائية ع<sub>س ص</sub> بالتباين المشترك (Covariance) أو التغاير، ويعتبر المصطلح الأخير (التغاير) أكثر شيوعاً في المراجع العربية. وخلاصة القول أن التغاير العيني هو مجموع مضارب انحرافات الأزواج العينية المرتبة، مقسوماً على عددها، ناقصاً واحداً.

يكون التغيرات موجباً إذا كانت العلاقة طردية، ويكون سالباً إذا كانت العلاقة عكسية. أما إذا كان التغيرات معدوماً (صفرًا) فهذا دليل على تساوى مجموع مضارب الانحرافات الموجبة بمجموع مضارب الانحرافات السالبة. إذاً فليس هناك اتجاه غالب في هذه الحالة مما يعنى عدم وجود علاقة بين المتغيرين.

وعليه، فإشارة التغيرات أهم من قيمته في هذه المرحلة، إلا إذا كانت صفرًا. وبناء على ذلك فالتغيرات مقياس نوعي وليس كمياً للعلاقة بين المتغيرين. فالتغيرات الكبير لا يعنى قوة العلاقة والعكس صحيح، خاصة إذا علمنا أن التغيرات يتغير بتغير وحدة القياس، بيد أنه لا يتأثر بتعديل نقطة الأصل (الجمع والطرح) وهى خواص مماثلة لخواص التباين. كذلك يمكن عرض المعادلة (١) على النحو التالى :

$$(٢) \quad \frac{\sum_{r=1}^n s_r s_r - \frac{\sum_{r=1}^n s_r \sum_{r=1}^n s_r}{n}}{n-1} = ع \text{ س ص}$$

هذا، وتجدر الإشارة إلى أن  $ع \text{ س ص} = ع \text{ ص س}$  كما هو موضح من المعادلة (٢) السابقة أو المعادلة (١)، كما أنه من السهل إثبات أنه إذا كانت  $س + ص = ل$

$$(٣) \quad \text{فإن : } ع^2 = ع^2 + ع^2 + ع^2 + ع^2 + ع^2 + ع^2$$

أما إذا كانت :

$$س - ص = ل$$

فإن :

$$(٤) \quad ع^2 = ع^2 + ع^2 - ع^2 - ع^2 - ع^2 - ع^2$$

ولهذا التشابه والتداخل بين التغيرات والتباين جاء مفهوم مصفوفة التشتت الخاصة بعرض التباينات والتغيرات لعدة متغيرات. ومصفوفة التشتت الخاصة بثلاثة متغيرات  $س$ ،  $ص$ ،  $ل$  هى :

	س	ص	ل
س	ع <sup>٢</sup> س	ع <sup>٢</sup> س ص	ع <sup>٢</sup> س ل
ص	ع <sup>٢</sup> ص س	ع <sup>٢</sup> ص	ع <sup>٢</sup> ص ل
ل	ع <sup>٢</sup> ل س	ع <sup>٢</sup> ل ص	ع <sup>٢</sup> ل

يلاحظ أن مصفوفة التشتت تكون دائماً متماثلة وعلى قطرها الرئيسي تكون التباينات وحوله التغيرات، كما أن الاختلاف بين التغيرات والتباين هو أن التغيرات قد يكون سالبة أو موجبة  
 ( -  $\infty \geq$  ع س ص  $\geq + \infty$  ).

**مثال (٣، ١٠) :**  
 استخدم البيانات لإيجاد التغيرات، ومصفوفة التشتت للمتغيرين س ر ، ص ر ، والبيانات هي :

س ر	ص ر
٢٠	٤
٢٦	٧
٣٤	١١
٣٨	١٣
٤٢	١٥
١٦٠	٥٠

**الحل**

س ر	ص ر	س ر	ص ر	س ر ص ر
٢٠	٤	٤٠٠	١٦	٨٠
٢٦	٧	٦٧٦	٤٩	١٨٢
٣٤	١١	١١٥٦	١٢١	٣٧٤
٣٨	١٣	١٤٤٤	١٦٩	٤٩٤
٤٢	١٥	١٧٦٤	٢٢٥	٦٣٠
١٦٠	٥٠	٥٤٤٠	٥٨٠	١٧٦٠

$$\frac{\frac{\sum (س ر)^2}{ن} - \frac{\sum س ر^2}{ن - ١}}{٤} = ع س$$

$$\frac{\frac{٢(١٦٠)}{٥} - ٥٤٤٠}{٤} =$$

$$٨٠ =$$

$$\frac{\frac{2(50)}{5} - 580}{4} = \text{ع}^2 \text{ ص}$$

$$20 =$$

$$\frac{\sum \text{ص ر ص} - \frac{\sum \text{ص ر} \sum \text{ص ر}}{ن}}{1 - ن} = \text{ع}^2 \text{ ص}$$

$$\frac{\frac{50 \times 160}{5} - 1760}{4} =$$

$$\frac{160}{4} =$$

$$40 =$$

مصفوفة التشتت هي :

40	80
20	40

البرنامج التالي يقوم بحساب التباين بين متغيرين ، والبيانات المستخدمة في البيانات بالمثل (١٠ ، ٣) السابق باستخدام معادلة التباين:

$$C = \frac{S - \frac{X_1 Y_1}{N}}{N - 1}$$

حيث :

$$S = \sum X_1 Y_1$$

N = حجم العينة

```

10 REM PROGRAM TO CALCULATE THE COVARIANCE
30 REM حساب المتغيرات بين متغيرين
40 X1=0
50 Y1=0
60 S=0
70 READ N REM NO OF OBSERVATIONS
80 FOR I=1 TO N
90 READ X(I),Y(I) REM المتغيرين
100 NEXT I
110 FOR I=1 TO N
120 X1=X1+X(I) REM SUM OF X
130 Y1=Y1+Y(I) REM SUM OF Y
140 S=S+X(I)*Y(I)
150 NEXT I
160 C=(S-(X1*Y1)/N)/(N-1)
170 PRINT 'الرقم', 'الوزن', 'العمر', 'الوزن * العمر'
180 PRINT '-----'
190 FOR I=1 TO N
200 PRINT X(I)*Y(I), Y(I), X(I), I
210 NEXT I
220 PRINT '-----'
230 PRINT S, X1, Y1
240 PRINT 'C = المتغير'
250 DATA 5, 20, 4, 26, 7, 34, 11, 38, 13, 42, 15
260 END

```

المخرجات  
-----

الوزن * العمر	العمر	الوزن	الرقم
80	4	20	1
182	7	26	2
374	11	34	3
494	13	38	4
630	15	42	5
1760	160	50	
	40		

= المتغير

## ٢ = معامل الارتباط الخطي للبيانات النسبية

(Pearson's Moment Correlation)

يعرف معامل بيرسون العزومي للارتباط الخطي بأنه القيمة المعيارية للمتغير، بمعنى أن معامل الارتباط الخطي هو :

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2 \sum y_i^2} \quad (٥)$$

$$r = \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2\right) \left(\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2\right)}}$$

هذا، ويلاحظ من المعادلة (٦) أنه إذا كانت :

$$s_r = v_r$$

فإن

$$r = 1$$

أما إذا كانت

$$s_r = -v_r$$

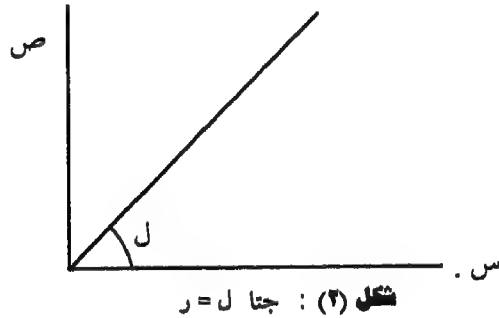
فإن :

$$r = -1$$

لذلك فللارتباط حدود ؛ إذ أنه يتراوح بين  $1 +$  و  $1 -$  . أى أن :

$$1 - \leq r \leq 1 +$$

ويكون الارتباط  $1 +$  إذا كانت العلاقة طردية تامة، ويكون  $1 -$  إذا كانت العلاقة الخطية عكسية سالبة ، ويساوى صفرًا إذا كانت معدومة . فهو بذلك ذو خصائص مماثلة لخصائص جيب تمام (جتا) الزاوية الواقعة بين الخط المستقيم والمحور السيني (الزاوية  $\theta$ ) في الشكل أدناه.



لا يتأثر الارتباط بتعديل مقياس الرسم (وحدة القياس)، أو نقطة الأصل (الجمع والطرح)، وليست له وحدة قياس . لذلك أصبح معامل الارتباط الخطي هو المقياس الكمي والنوعي للعلاقة الخطية بين المتغيرين . فعدمه، أو ضعفه يعنى عدم ، أو ضعف العلاقة الخطية ، ولكنه ليس دليلاً على عدم وجود أى علاقة ؛ لأن العلاقة قد تكون غير خطية كما أن وجوده لا يعنى السببية .

مثال (٤, ١٠) :

استخدم مثال (٣) السابق لإيجاد الارتباط بين المتغيرين .

الحل :

من مثال (٣) :

$$\bar{X} = ٤٠$$

$$\bar{Y} = ٨٠$$

$$\bar{X}^2 = ٢٠$$

(٥)

$$r = \frac{\bar{X} \bar{Y}}{\bar{X} \bar{X}}$$

$$= \frac{٤٠}{\sqrt{٢٠ \times ٨٠}}$$

$$= ١$$

أى أن العلاقة طردية تامة

```

10 REM PROGRAM TO CALCULATE THE COVARIANCE
30 REM حساب المتغيرات بين متغيرين
40 X1=0
50 Y1=0
60 S=0
70 READ N REM NO OF OBSERVATIONS
80 FOR I=1 TO N
90 READ X(I),Y(I) REM المتغيرين
100 NEXT I
110 FOR I=1 TO N REM SUM OF X
120 X1=X1+X(I) REM SUM OF Y
130 Y1=Y1+Y(I)
140 S=S+X(I)*Y(I)
150 NEXT I
160 C=(S-(X1*Y1)/N)/(N-1)
170 PRINT 'الوزن', 'الوزن', 'الوزن', 'الوزن', 'الوزن'
180 PRINT 'الوزن', 'الوزن', 'الوزن', 'الوزن', 'الوزن'
190 FOR I=1 TO N
200 PRINT X(I)*Y(I),Y(I),X(I),I
210 NEXT I
220 PRINT 'الوزن', 'الوزن', 'الوزن', 'الوزن', 'الوزن'
230 PRINT S,X1,Y1
240 PRINT C, 'المتغيرات'
250 DATA 5,20,4,26,7,34,11,38,13,42,15
260 END

```



المفرجات			
الوزن X العمر	العمر	الوزن	الرقم
80	4	20	1
182	7	26	2
374	11	34	3
494	13	38	4
630	15	42	5
1760	160	50	
	40		

التغاير =

البرنامج التالي يقوم بحساب الارتباط الخطى بين متغيرين للبيانات الواردة في المثال (١٠، ٤) باستخدام معادلة الارتباط :

$$L = \frac{A}{\sqrt{BC}}$$

حيث :

$$A = S - \frac{X_1 Y_1}{N}$$

$$B = X_2 - \frac{X_1^2}{N}$$

$$C = Y_2 - \frac{Y_1^2}{N}$$

$$S = \sum XY$$

$$X_1 = \sum X$$

$$Y_1 = \sum Y$$

$$X_2 = \sum X^2$$

$$Y_2 = \sum Y^2$$

$$N = \text{حجم العينة}$$

```

10  REM  PROGRAM TO COMPUTE LINEAR CORRELATION
20  REM  حساب الارتباط الخطي
30  X1=0
40  Y1=0
50  X2=0
60  Y2=0
70  S=0
80  READ N  REM NO OF OBSERVATIONS
90  FOR I=1 TO N
100 READ X(I),Y(I)
110 NEXT I
120 FOR I=1 TO N
130 X1=X1+X(I)  REM SUM OF X
140 Y1=Y1+Y(I)  REM SUM OF Y
150 X2=X2+X(I)*X(I)
160 Y2=Y2+Y(I)*Y(I)
170 S=S+X(I)*Y(I)
180 NEXT I
190 A=S-X1*Y1/N
200 B=X2-X1*X1/N
210 C=Y2-Y1*Y1/N
220 L=A/SQR(B*C)
230 PRINT 'س د ١', 'س د ٢', 'س د ٣', 'س د ٤', 'س د ٥'
240 PRINT 'س د ١', 'س د ٢', 'س د ٣', 'س د ٤', 'س د ٥'
250 FOR I=1 TO N
260 PRINT Y(I)*Y(I),X(I)*X(I),X(I)*Y(I),Y(I),X(I)
270 NEXT I
280 PRINT 'س د ١', 'س د ٢', 'س د ٣', 'س د ٤', 'س د ٥'
290 PRINT 'س د ١', 'س د ٢', 'س د ٣', 'س د ٤', 'س د ٥'
300 PRINT 'س د ١', 'س د ٢', 'س د ٣', 'س د ٤', 'س د ٥'
310 PRINT 'س د ١', 'س د ٢', 'س د ٣', 'س د ٤', 'س د ٥'
320 DATA 5,20,4,26,7,34,11,38,13,42,15
330 END

```

المخرجات

س د ١	س د ٢	س د ٣	س د ٤	س د ٥
16	400	80	4	160
49	676	182	7	280
121	1156	374	11	484
169	1444	494	13	676
225	1764	630	15	900
580	5440	1760	50	160
	1			

الارتباط =

### ٣ - معنوية الارتباط :

يعتبر معامل ارتباط بيرسون مقدراً للارتباط النظري (ز) الخاص بالمجتمع الثنائي ، الذي سحبت منه العينة ذات الحجم (ن) ، بيد أن إعادة السحب قد تؤدي إلى معامل ارتباط آخر. وإذا تم تكرار عملية الاختيار العشوائي للعينات الثنائية ، فسوف تكون هناك عدة ارتباطات هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠ . وكل منها يمثل تقديراً للارتباط الحقيقي الخاص بالمجتمع (ز) .

بيد أن توزيع الارتباطات العينية ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠ لا يتبع لأي توزيع من التوزيعات الإحصائية إذا كانت ز ≠ صفراً . إلا أنه ، وبافتراض أن ز = صفراً ، وباعتبار أن التوزيع الخاص بالمجتمع ، يخضع للتوزيع الطبيعي فإن :

(٧) :

$$T = \frac{r}{\sqrt{\frac{r-1}{n-2}}}$$

تتبع توزيع ت على (ن - ٢) درجات حرية، لذلك تستخدم الإحصائية السابقة لاختبار الفرضية القائلة بأن :

ف. : ز = صفراً

مقابل أى فرضية من البدائل التالية :

ف. : ز ≠ صفر

أو :

ف. : ز < صفر أو ف. : ز > صفر

**مثال (٩, ١٠) :**

اختيرت عينة عشوائية قوامها ٢٧ من بيانات ذات بعدين، فأتضح أن الارتباط الخطى يساوى ٠,٨، فهل يعتبر ذلك دليلاً على وجود ارتباط بمستوى معنوية ٥٪؟

**الحل :**

ف. : ز = صفراً

ف. : ز ≠ صفراً

إحصائية الاختبار من المعادلة (٧) هي :

(٧)

$$T = \frac{r}{\sqrt{\frac{r-1}{n-2}}}$$

$$= \frac{0,8}{\sqrt{\frac{0,64-1}{25}}}$$

$$\frac{0,8 \times 0,5}{0,6} =$$

$$= 0,67$$

القيمة الحرجة من جدول ت بالملحق رقم (٢) في نهاية الكتاب على ٢٥ درجات حرية تساوى ٢,٠٦٠. وبما أن إحصائية الاختبار أكبر من القيمة الحرجة فلا بد من قبول الفرضية البديلة بعد رفض فرضية العدم. هذا، ويستخدم جدول (١) في نهاية الفصل لاختبار الفرضيات بطريقة مباشرة.

**مثال (١٠,٦) :**

اختيرت عينة عشوائية حجمها ٢٨ لبيانات ذات بعدين، فأتضح أن الارتباط الخطى يساوى ٢٣,٠، اختبر الفرضية القائلة بأن الارتباط الحقيقى للمجتمع ٣,٠، وأوجد حدود الثقة لمعامل ارتباط المجتمع، وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

**الحل :**

$$1 = 0,5\%$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857\%$$

باستخدام جدول التوزيع الطبيعى بالملحق (١) نجد أن القيمة الحرجة هي :

$$1,96 = 0,975$$

أما إحصائية الاختبار فهي :

$$y = \frac{s - w}{m} \quad (11)$$

$$s = \frac{1}{2} \text{ لن } \frac{1}{r-1} \quad (8)$$

ومن جدول (٢) في نهاية هذا الفصل يتضح أن

$$س = \frac{١}{٢} \ln \frac{٠,٢٣ + ١}{٠,٢٣ - ١}$$

$$٠,٢٣٤ =$$

وباستخدام نفس الجدول :

$$و = \frac{١}{٢} \ln \frac{٠,٣ + ١}{٠,٣ - ١}$$

$$٠,٣١٠ =$$

(١٠)

$$م = \frac{١}{٣ - \sqrt{٣}}$$

$$= \frac{١}{٣ - ٢,٨}$$

$$٠,٢ =$$

وعليه تكون إحصائية الاختبار بعد التعويض في المعادلة (١١) هي :

$$ي = \frac{٠,٣١٠ - ٠,٢٣٤}{٠,٢}$$

$$٠,٣٨ =$$

وبما أن :

$$١,٩٦ < ٠,٣٨ -$$

فهذا يعنى أنه لا بد من قبول فرضية العدم القائلة بأن  $ز = ٠,٣$  ، بمعنى أنه لا يوجد فرق جوهري بين  $٠,٣$  والقيمة العينية للارتباط التي تساوى  $٠,٢٣$

أما حدود الثقة فهي :

(١٢)

$$س \pm ي_{٠,٩٧٥} \times م$$

$$0,2 \times 1,96 \pm 0,234$$

$$0,392 \pm 0,234$$

وعليه تكون :

$$0,626 \geq 0,158 -$$

وباستخدام جدول (٢) مرة أخرى بطريقة معاكسة لإيجاد ز لكل حالة باعتبار أن

$$0,158 - = \text{لن} \frac{z+1}{z-1}$$

وأيضاً :

$$0,626 = \text{لن} \frac{z+1}{z-1}$$

يلاحظ أن :

$$0,158 - \text{تناظرها} - 0,159$$

$$0,626 \text{ تناظرها} 0,555$$

وعليه تكون :

$$0,555 \geq z \geq 0,159 -$$

#### ٤ - اختبار الفرق بين ارتباطين لعينيتين:

يجب ألا يكون الفرق بين ارتباطين لعينيتين من نفس المجتمع جوهرياً، واختبار ذلك الفرق يستخدم اختبار الفرق بين ارتباطين لعينيتين؛ بهدف التحقق من تبعيتهما لمجتمع واحد، أو مجتمعين مختلفين. والمثال التالي يوضح ذلك.

#### مثال (١٠،٢) :

أجريت دراسة لعينيتين من طلاب مدرستين لمعرفة الارتباط بين درجات اللغة العربية واللغة الإنجليزية، فكانت النتائج كالآتي :

اسم المدرسة	حجم العينة (ن)	الارتباط (ر) بين اللغتين
مدرسة قيس	٥	٠,٨٩
مدرسة زهير	٨	٠,٦٣

فهل هناك فرق جوهري بين الارتباطين بمستوى معنوية ٥٪؟

**الحل :**

إذا كانت :

$\rho_1$  = ارتباط العينة الأولى .

$\rho_2$  = ارتباط العينة الثانية .

$n_1$  = حجم العينة الأولى .

$n_2$  = حجم العينة الثانية .

ففرضية العدم هي :

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2$$

والفرضية البديلة هي :

$$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2$$

$$\frac{1}{n_2 - 3} = \frac{1}{n_1 - 3}$$

$$0,2 =$$

$$0,2 + 0,5 = \frac{1}{n_2 - 3} + \frac{1}{n_1 - 3}$$

$$0,7 =$$

إحصائية الاختبار :

$$t = \frac{0,741 - 1,422}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{0,681}{\sqrt{0,257}} =$$

$$1,96 > 0,257$$

فليس هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم، الفائلة بأنه لا يوجد فرق جوهري بين الارتباطين.

### ٥ - معامل ارتباط الرتب لتسليين

(Spearman's Rank correlation)

يرتب المتغيران أولاً تصاعدياً أو تنازلياً، بنفس الطريقة الواردة في الفصل السابق، ثم يستخرج الفرق (انحراف كل زوج من الأزواج المرتبة)، ويرمز له بالرمز (ل). وبافتراض أن عدد الفروقات يساوي ن فمعامل سبيرمان لارتباط الرتب هو :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (l_i)^2}{n(n^2 - 1)} \quad (١٦)$$

هذا، ويمتاز معامل ارتباط سبيرمان للرتب بنفس خصائص معامل بيرسون، وتستخدم نفس الأساليب السابقة لاختبارات الفرضيات وفترات الثقة.

### مثال (١٠، ٨) :

البيانات التالية تمثل درجات عينة قوامها ١٠ أشخاص تقدموا للالتحاق بوظيفة، فأجريت لهم مقابلات شخصية من لجنة مكونة من عضوين، يقوم كل عضو برصد درجة لكل شخص من ١٠ ٠ أوجد معامل سبيرمان لدرجات عضوي اللجنة.



الرقم	درجات العضو الأول	درجات العضو الثاني
١	٩	١٠
٢	٥	٧
٣	٦	٥
٤	١	١
٥	٣	٤
٦	٢	٢
٧	٨	٩
٨	٧	٦
٩	١٠	٨
١٠	٤	٣

الحل :

الرقم	درجات الأول	درجات الثاني	الفرق (ل) الأول - الثاني	مربع الفرق (ل <sup>٢</sup> )
١	٩	١٠	١-	١
٢	٥	٧	٢-	٤
٣	٦	٥	١+	١
٤	١	١	٠	٠
٥	٣	٤	١-	١
٦	٢	٢	٠	٠
٧	٨	٩	١-	١
٨	٧	٦	١+	١
٩	١٠	٨	٢+	٤
١٠	٤	٣	١+	١
المجموع			صفر	١٤

(١٦)

$$r = \frac{\sum L^2}{n(n-1)} - 1 = \frac{14 \times 6}{99 \times 10} - 1 = 0,915 =$$



## ٦ - الارتباط الجزئى (PARTIAL CORRELATION):

يستخدم الارتباط الجزئى لقياس العلاقة الخطية بين متغيرين فقط. باعتبار أن بقية المتغيرات ثابتة. لذلك يلجأ الباحثون لاستخدام الارتباط الجزئى، عندما يكون عدد المتغيرات أكثر من اثنين، أى أن البيانات ذات عدة أبعاد. افرض أن هناك ثلاثة متغيرات، ارتباطاتها فيما بينها على النحو الآتى :

$$r_{12} = \text{الارتباط بين س و ص} \quad (r_{12} \text{ ص})$$

$$r_{13} = \text{الارتباط بين س و ل} \quad (r_{13} \text{ ل})$$

$$r_{23} = \text{الارتباط بين ص و ل} \quad (r_{23} \text{ ل})$$

فالارتباط الجزئى بين س و ص باعتبار أن ل ثابت، يرمز له بالرمز  $r_{12.3}$ ، أى أن المتغير الذى يكون على يسار الفاصلة هو الثابت. ولقد جاء مفهوم الارتباط الجزئى من أنه الارتباط الخطى بين الانحرافين عن المتغير الثابت، وبناء على ذلك أصبح فى الإمكان تمثيل الارتباط الجزئى على النحو التالى :

$$(17) \quad r_{12.3} = \frac{r_{12} r_{13} - r_{23}}{\frac{1}{2}[(r_{12}^2 - 1)(r_{13}^2 - 1)]}$$

وبالمثل فإن :

$$(18) \quad r_{13.2} = \frac{r_{13} r_{23} - r_{12}}{\frac{1}{2}[(r_{13}^2 - 1)(r_{23}^2 - 1)]}$$

أما إذا كان عدد المتغيرات أربعة فإن :

$$(19) \quad r_{12.34} = \frac{r_{12} r_{13} r_{14} - r_{23} r_{14} - r_{24} r_{13}}{\frac{1}{2}[(r_{12}^2 - 1)(r_{13}^2 - 1)(r_{14}^2 - 1)]}$$

أو أن :

$$(20) \quad r_{23.14} = \frac{r_{23} r_{24} r_{14} - r_{13} r_{24} - r_{14} r_{23}}{\frac{1}{2}[(r_{23}^2 - 1)(r_{24}^2 - 1)(r_{14}^2 - 1)]}$$

علما بأن نتيجتي (١٩) و (٢٠) متساويتان .

**مثال (١٠,٩) :**

إذا كانت :

$$٠,٦٣ = ٢١ ر$$

$$٠,٨١ = ٣١ ر$$

$$٠,٧٢ = ٣٢ ر$$

$$\text{فأوجد } ر$$

**الحل :**

$$(١٧) \quad \frac{٢١ ر - ٣١ ر - ٣٢ ر}{\frac{1}{2} [(٢ ر - ١) (٣١ ر - ١)]} = ٣٢ ر$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة :

$$\frac{٠,٧٢ \times ٠,٨١ - ٠,٦٣}{[(٢(٠,٧٢) - ١) (٣١(٠,٨١) - ١)]} = ٣٢ ر$$

$$\frac{٠,٤٦٨}{٠,٤٠٧} =$$

$$٠,١١٥ =$$

هذا، وتستخدم جداول اختبار الارتباط الخطي لاختبار معنوية اختلاف الارتباط الجزئي عن الصفر، وذلك باعتبار أن حجم العينة  $n - ١$  إذا كان عدد المتغيرات ثلاثة، و  $n - ٢$  إذا كانت عدد المتغيرات أربعة.

## ٧ - الارتباط الثنائي المتصل (Biserial correlation) :

إذا كان المتغير س ر متصلاً بينما كان المتغير ص ر ثنائياً التسلسل، كأن تقسم المدينة إلى منطقتين، أو حالات الإجابة بنعم أو لا، أو الحالة الاجتماعية (متزوج، أو غير متزوج)، وإذا كانت :

$$\begin{aligned} \text{س}_1 &= \text{الوسط الحسابي للمتغير المتصل عندما كانت ص ر} \\ \text{س}_2 &= \text{الوسط الحسابي المقابل لصفة التقسيم الثانية (ص ر)} \end{aligned}$$

$$(21) \quad \frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_1 + \text{ص}_2} = \text{ح}$$

$$\frac{\text{ص}_2}{\text{ص}_1 + \text{ص}_2} = \text{ع}$$

$$(22) \quad \text{ح} - 1 =$$

فالارتباط الخطي بين المتغير النسبي المتصل (س ر) والمتغير الخاص بصفتي التقسيم (ص ر) هو :

$$(23) \quad r = \left( \frac{\text{س}_2 - \text{س}_1}{\text{ع س}} \right) \times (\text{ح ع})^{\frac{1}{2}}$$

هذا، ويلاحظ أن المتغير الثنائي التسلسل لا يدخل في العمليات الحسابية الخاصة باستخراج الارتباط، أما اختبارات المعنوية وحدود الثقة فتستخدم لها نفس المعادلات الخاصة بمعامل بيرسون للارتباط الخطي.

**مثال (١٠، ١٠) :**

البيانات التالية تمثل عدد القتل في حوادث المرور، موزعين حسب مكان الوفاة خلال الفترة من أبريل حتى ديسمبر ١٩٨٠ م.

والبيانات<sup>(١)</sup> هي :

الشهر	عدد القتلى قبل الوصول للمستشفى	عدد القتلى بعد الوصول للمستشفى
أبريل	٢١	١٨
مايو	٢٦	٢١
يونيو	٣٦	٢٦
يوليو	٤٦	٣٣
أغسطس	٣٩	٢٩
سبتمبر	٣٤	٢٤
أكتوبر	٣٠	١٩
نوفمبر	١٩	١٤
ديسمبر	١٩	١٥
المجموع	٢٧٠	١٩٩

أوجد الارتباط بين عدد القتلى ومكان الوفاة.

**الحل :**

$$\begin{aligned}
 (٢٣) \quad r &= \frac{s_1 - s_2}{\sqrt{E_s}} \times \sqrt{C} \\
 E_s &= ٨,٨٦٨ \\
 s_1 &= \frac{٢٧٠}{٩} = ٣٠ \\
 s_2 &= \frac{١٩٩}{٩} = ٢٢,١١ \\
 C &= \frac{١ ص}{٢ ص + ١ ص} \\
 (٢١)
 \end{aligned}$$

(١) المصدر : الإدارة العامة للمرور بالرياض : بحث حوادث السيارات والأضرار الصحية الناتجة عنها. الرياض ، ١٩٨١ ،

$$\frac{270}{199 + 270} =$$

$$., 576 =$$

(٢٣)

$$\frac{2ص}{2ص + 1ص} = ح$$

$$\frac{199}{469} =$$

$$., 424 =$$

$$., 424 \times 0.576 \sqrt{\times \frac{22,11 - 30}{8,868}} = \text{ن.م.}$$

$$., 44 =$$

هذا، ويلاحظ من جدول (١) في نهاية هذا الفصل أن القيمة الحرجة لاختبار الفرضية :

ف. : ز = صفراً

مع الفرضية البديلة :

ف. : ز < صفر

وبمستوى ٥% تساوى ٤٩٧ ، وفي ذلك دلالة على خطورة الإصابات التي يصعب إسعافها في أكثر الحالات .

البرنامج التالي يقوم بحساب الارتباط الثنائي مستخدماً البيانات الواردة بالمثل (١٠ , ١٠) السابق وباستخدام المعادلة :

$$D = \frac{B - C}{V} \sqrt{AE}$$

حيث :

$$B = \frac{X_1}{N}$$

$$C = \frac{Y_1}{N}$$

$$A = \frac{X_1}{X_1 + Y_1}$$

$$E = 1 - A$$

$$V = \sqrt{(X_2 + Y_2 - (X_1 + Y_1)/N) / (N - 1)}$$

$X_1, Y_1$  = مجاميع

$X_2, Y_2$  = مجاميع مربعات

لابد من حساب الانحراف المعياري ( V ) هنا الذى يساوى 8.868 المستخدم فى السطر رقم 220 وهو عبارة عن :

$$\left[ \begin{aligned} & (21)^2 + (26)^2 + (36)^2 + \dots + (19)^2 + (18)^2 + (21)^2 + (15)^2 \\ & - \sum (21 + 26 + 36 + \dots + 15)^2 / N \end{aligned} \right] \div (N - 1)$$

حيث :

$$N = 18$$

مستخدماً V الواردة فى المعادلة السابقة.

```

10 REM PROGRAM TO COMPUTE BISERIAL CORRELATION
30 REM برنامج لحساب الارتباط البينى
40 X1=0
50 Y1=0
60 READ N REM NO OF OBSERVATIONS
70 PRINT "العدد", العدد
80 PRINT "الشهر", الشهر
90 FOR I=1 TO N
100 READ X,Y
110 PRINT X,Y,I
120 X1=X1+X
130 Y1=Y1+Y
140 NEXT I
150 A=X1/(X1+Y1)
160 B=Y1/N
200 C=Y1/N
210 E=1-A
220 D=(B-C)/8.868*SQR(A*E)
230 PRINT
240 PRINT Y1,X1,"المجموع"
250 PRINT D,"= الارتباط البينى"
260 DATA 9,21,18,26,21,36,26,46,33,39,29,34,24,30,19,19,14,19,15
270 END

```



المخرجات		
العدد ٢	العدد ١	الشهر
١٩٩	٢٧٠	المجموع
	.٤٣٩٦٦٩٤	الارتباط الثاني =

أما إذا كان المتغير الثنائي متصلاً في الأصل، ولكنه قسم اصطناعياً لصفيتين، كأن يقسم الدخل إلى قسمين، أحدهما أكثر من ١٠٠٠٠ ريال شهرياً، والثاني أقل من ذلك المقدار، أو عند تقسيم الأعمار لأكثر من ٢٠ سنة وأقل من ذلك - فالارتباط الثاني التسلسل هو :

$$(٢٤) \quad \frac{ح \text{ ح}'}{ع س} = \frac{(س_١ - س_٢)}{ع س}$$

حيث :

$$(٢٥) \quad \frac{١}{\sqrt{٢ ط}} = \left( \frac{س_١}{س_٢} - ١ \right)$$

علمياً بأن :

$$\frac{٢٢}{٧} = ط$$

$$٢,٧١٨٢٨ = هـ$$

أما قيمة  $س$  فتستخرج من جدول التوزيع الطبيعي بالملحق؛ لأنها تساوى القيمة التي ينقسم عندها المنحنى الخاص بالتوزيع الطبيعي إلى جزأين متكاملين هما  $ح$  و  $ع$ .

### مثال (١٠، ١١) :

توضح البيانات (٢) التالية عدد المصابين والقتلى في حوادث المرور، حسب وقت وقوع الحادث، خلال الفترة من أبريل حتى ديسمبر ١٩٨٠.

والبيانات هي :

عدد المصابين والقتلى	وقت وقوع الحادث
٧٦	٨ - ٦ صباحاً
٧٠	١٠ - ٨ صباحاً
٢٨	١٢ - ١٠ ظهراً
٢٨	٢ - ١٢ ظهراً
٦٨	٤ - ٢ عصرًا
٧٤	٦ - ٤ مساءً
٥٤	٨ - ٦ مساءً
٢٨	١٠ - ٨ مساءً
٦	١٢ - ١٠ صباحاً
٢	٢ - ١٢ صباحاً
٢	٤ - ٢ صباحاً
١٠	٦ - ٤ صباحاً
٤٤٦	المجموع

أوجد الارتباط بين عدد المصابين والقتلى من جهة ووقت وقوع الحادث حسب النهار والليل (أى قبل وبعد السادسة مساءً) من جهة أخرى.

### الحل :

الوقت متصل، إلا أنه قسم اصطناعياً إلى جزأين، هما : قبل، وبعد الغروب، وعليه تستخدم المعادلة

$$r = \frac{C_x}{C_y} \frac{(S_1 - S_2)}{C_s} \quad (24)$$

(٢) المصدر : نفس المصدر السابق صفحة (٣٧).

- مت ١ = الوسط الحسابى لحوادث النهار.  
 مت ٢ = الوسط الحسابى لحوادث الليل.  
 ح = نسبة حوادث النهار للعدد الكلى.  
 ح - ١ = ح وهى نسبة حوادث الليل للعدد الكلى.

إذاً :

$$\text{مت } ١ = \frac{٧٤ + ٦٨ + ٢٨ + ٢٨ + ٧٠ + ٧٦}{٦}$$

$$= ٥٧,٣٣٣$$

$$\text{مت } ٢ = \frac{١٠ + ٢ + ٢ + ٦ + ٢٨ + ٥٤}{٦}$$

$$= ١٧$$

$$\text{ح} = \frac{٣٤٤}{٤٤٦}$$

$$= ٠,٧٧١$$

$$\text{ح} - ١ =$$

$$= -٠,٢٢٩$$

وباستخدام جدول التوزيع الطبيعى بالملحق رقم (١)، يلاحظ أن القيمة التى تناظر ٠,٧٧١ هى :

$$= ٠,٧٤$$

وعليه :

(٢٥)

$$\text{ح} = \frac{1}{\sqrt{٢}} - \frac{\text{ح}}{٢}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{٢٢}{٧} \times ٢}} - \frac{\text{ح}}{٢}$$

$$0,303 =$$

$$ع س = 09,06$$

$$ر = \frac{(17 - 09,06) \times 0,303 \times 0,771}{09,06 \times 0,303}$$

$$0,795 =$$

هذا ، وتجدر الإشارة إلى أن الارتباط الثنائي التسلسل قد يزيد على الواحد إذا كان توزيع المتغير الثنائي التسلسل بعيداً جداً عن التوزيع الطبيعي . كذلك لا يمكن استخدام الاختبارات السابقة في هذا النوع من الارتباطات الخطية .

#### ٨ - معامل الارتباط الرباعي للتقسيم الاصطناعي

##### (Tetrachoric Correlation)

إذا قسم المتغيران المتصلان تقسيماً اصطناعياً ، بحيث ينقسم المتغير الأول إلى قسمين هما س<sub>١</sub> وس<sub>٢</sub> وينقسم المتغير الثاني إلى قسمين أيضاً هما ص<sub>١</sub> وص<sub>٢</sub> ، فسوف تنقسم البيانات إلى أربع خلايا على النحو التالي :

ص <sub>٢</sub>	ص <sub>١</sub>	س ص
جـ	ب	س <sub>١</sub>
ل	د	س <sub>٢</sub>

ويكون الارتباط الخطي بين المتغيرين على النحو الآتي :

$$ر = جتا \left[ \frac{ط}{\frac{1}{2} \left( \frac{ب ل}{ج د} \right) + 1} \right] \quad (٢٦)$$

**مثال (١٠, ١٢) :**

البيانات التالية عبارة عن مائة شخص ، تم تقسيمهم إلى مجموعات حسب مستوى الدخل والعمر. أوجد الارتباط بين الدخل والعمر، والبيانات هي :

الدخل \ العمر	أقل من ٤٠ سنة	٤٠ سنة فما فوق
أقل من ١٠٠٠٠ ريال شهرياً	٤٩	١٥
١٠٠٠٠ ريال شهرياً فأكثر	١٠	٢٦

**الحل :**

$$ب = ٤٩$$

$$ج = ١٥$$

$$د = ١٠$$

$$ل = ٢٦$$

$$(٢٦) \quad \left[ \frac{ط}{\frac{1}{2} \left( \frac{ب ل}{ج د} \right) + 1} \right] \quad ر = جتا$$

$$\left[ \frac{ط}{\frac{1}{2} \left( \frac{٢٦ \times ٤٩}{١٠ \times ١٥} \right) + 1} \right] \quad جتا =$$

$$ر = ٠,٩٤٦$$

**٩ - الارتباط بين المتغيرات الاسمية (phi and Cramer's V correlations) :**

إذا كانت :

ب، ج، د، ل عبارة عن بيانات بخلايا جدول ٢×٢ لمتغيرين اسميين على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{ج} \\ \text{د} & \text{ل} \end{bmatrix}$$

فإن معامل فای للارتباط هو :

$$(٢٧) \quad r = \frac{\text{ج د} - \text{ب ل}}{\frac{1}{2}[(\text{ج} + \text{د})(\text{ب} + \text{ل}) + (\text{ج} + \text{ل})(\text{ب} + \text{د})]}$$

هذا، ويعتبر معامل فای أحد أنواع معامل بيرسون.

**مثال (١٣، ١٠) :**

تمثل البيانات التالية (٣) عدد المصابين والقتلى لكل مائة حادث مرورى فى مدينتى الرياض وجدة خلال عام ١٤٠١ هـ . أوجد الارتباط بين نوع الحادث (إصابة أو قتل)، والمدينة . والبيانات هى :

نوع الحادث المدينة	إصابات	قتل
الرياض	٥٠	٤
جدة	١١٨	١٣

**الحل :**

$$(٢٧) \quad r = \frac{\text{ج د} - \text{ب ل}}{\frac{1}{2}[(\text{ج} + \text{د})(\text{ب} + \text{ل}) + (\text{ج} + \text{ل})(\text{ب} + \text{د})]}$$

$$\text{ب} = ٥٠$$

$$\text{ج} = ٤$$

$$\text{د} = ١١٨$$

$$\text{ل} = ١٣$$

(٣) المصدر : الإدارة العامة للمرور - النشرة الإحصائية لعام ١٤٠١ هـ - الرياض (١٤٠٢ هـ) صفحة (١٥).

وبالتعويض في (٢٧) سابقاً تكون :

$$r = \frac{13 \times 50 - 118 \times 4}{\frac{1}{2} [(13 + 4)(118 + 50)(13 + 118)(4 + 50)]}$$

$$= \frac{178 -}{\frac{1}{2} [17 \times 168 \times 131 \times 54]}$$

$$= \frac{178 -}{4494,81}$$

$$= -0,04$$

هذا، وتعتبر العلاقة جوهريّة (أكبر من الصفر) إذا ثبت ذلك باختبار الاستقلال بجداول التوافق ؛ وذلك لأن :

$$r = \sqrt{\frac{k^2}{n}} \quad (28)$$

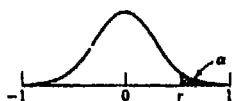
حيث  $k^2$  هي إحصائية الاختبار التي تتبع توزيع مربع كاي ، أما  $n$  فهي حجم العينة هذا، وتتراوح قيمة الارتباط هنا بين ١ + و ١ - .  
أما إذا كان جدول التوافق أكبر من  $2 \times 2$  فمن الأفضل استخدام معامل التوافق (coefficient of contingency) بدلاً من معامل فاي . ويعرف معامل التوافق بأنه :

$$r = \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + n}} \quad (29)$$

هذا، وقد عدل معامل التوافق لتتراوح قيمته بين ١ + و ١ - . ويعرف الارتباط المعدل بمعامل كرامر (cramer V) الذي يكون على النحو التالي :

$$r = \sqrt{\frac{k^2}{n(l-1)}} \quad (30)$$

حيث  $l$  هو عدد الصفوف أو الأعمدة أيها أقل .



### جدول (١) القيم الحرجة لاختبار \*

للاختبار ذي الجانبين ،  $\alpha$  قيمتها ضعف القيمة المسجلة عند عنوان العمود الذي له قيمة  $r$  الحرجة ، لذلك لقيمة

$\alpha$	.05	.025	.005
$n$			
5	.805	.878	.959
6	.729	.811	.917
7	.669	.754	.875
8	.621	.707	.834
9	.582	.666	.798
10	.549	.632	.765
11	.521	.602	.735
12	.497	.576	.708
13	.476	.553	.684
14	.457	.532	.661
15	.441	.514	.641
16	.426	.497	.623

$\alpha$	.05	.025	.005
$n$			
17	.412	.482	.606
18	.400	.468	.590
19	.389	.456	.575
20	.378	.444	.561
25	.337	.396	.505
30	.306	.361	.463
35	.283	.334	.430
40	.264	.312	.402
50	.235	.279	.361
60	.214	.254	.330
80	.185	.220	.286
100	.165	.196	.256

$\alpha = .05$

اختار العمود .025

\* المصدر : بول ج. هويل : المبادئ الأولية في الإحصاء ، ترجمة د. بدرية عبد الوهاب ود. محمد كامل الشربيني ، الطبعة الرابعة ، مطابع وايل للكتب العربية - نيويورك - ١٩٨٤ ، صفحة ٣٢٧.

$r$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
.0	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050	0.060	0.070	0.080	0.090
.1	.100	.110	.121	.131	.141	.151	.161	.172	.182	.192
.2	.203	.213	.224	.234	.245	.255	.266	.277	.288	.299
.3	.310	.321	.332	.343	.354	.365	.377	.388	.400	.412
.4	.424	.436	.448	.460	.472	.485	.497	.510	.523	.536
.5	.549	.563	.576	.590	.604	.618	.633	.648	.662	.678
.6	.693	.709	.725	.741	.758	.775	.793	.811	.829	.848
.7	.867	.887	.908	.929	.950	.973	.996	1.020	1.045	1.071
.8	1.099	1.127	1.157	1.188	1.221	1.256	1.293	1.333	1.376	1.422
.9	1.472	1.478	1.483	1.488	1.494	1.499	1.505	1.510	1.516	1.522
.91	1.528	1.533	1.539	1.545	1.551	1.557	1.564	1.570	1.576	1.583
.92	1.589	1.596	1.602	1.609	1.616	1.623	1.630	1.637	1.644	1.651
.93	1.658	1.666	1.673	1.681	1.689	1.697	1.705	1.713	1.721	1.730
.94	1.738	1.747	1.756	1.764	1.774	1.783	1.792	1.802	1.812	1.822
.95	1.832	1.842	1.853	1.863	1.874	1.886	1.897	1.909	1.921	1.933
.96	1.946	1.959	1.972	1.986	2.000	2.014	2.029	2.044	2.060	2.076
.97	2.092	2.109	2.127	2.146	2.165	2.185	2.205	2.227	2.249	2.273
.98	2.298	2.323	2.351	2.380	2.410	2.443	2.477	2.515	2.555	2.599
.99	2.646	2.700	2.759	2.826	2.903	2.994	3.106	3.250	3.453	3.800

### جدول (٢)

جدول تحويل

ر إلى

(تحويل لشر لمعامل

الارتباط) \*

\* المصدر : محمد صبحي أبو صالح وعدنان محمد عوض : مقدمة في الإحصاء ، دارجون وايل وأبنائه - نيويورك ، ١٩٨٣ ، صفحة

.٣١٥



## تمارين

١ - البيانات التالية عبارة عن العمر بالسنوات ، وقوة التحمل للعمل الشاق لعشرة عمال تم اختيارهم كعينة عشوائية بأحد المصانع . والبيانات هي :

العمر بالسنوات	الزمن بالدقائق
٣٦	٥
٢٥	٨
٣٩	٤
١٩	٩
٣٠	٥
٢١	١٠
٢٦	٧
٤١	٢
٥٦	٤
٣١	٦

١ - ارسم لوحة التشتت لهذه البيانات .

٢ - ما هو التغاير؟

٣ - ماهي مزايا الارتباط الخطي ، وما علاقته بالتغاير؟

٤ - حلل لوحة التشتت لبيانات السؤال الأول .

٥ - أوجد التغاير والارتباط الخطي لبيانات السؤال الأول .

٦ - إذا كانت :

$$س_r = ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨$$

$$ص_r = ٦، ١٠، ٦، ١٠، ٦، ١٠، ٦، ١٠$$

فأوجد الارتباط الخطي بين المتغيرين .

٧ - البيانات التالية تمثل تكلفة الصيانة بآلاف الريالات سنوياً ، والعمر لعدد من الناقلات

التي اختيرت كعينة عشوائية ، والبيانات هي :

التكلفة العمر بالسنوات

٣	٧
٥	٤
٤	٤
٧	٩
٢	١
٦	٨

- فهل هناك ارتباط بين المتغيرين يختلف عن الصفر بمستوى معنوية ٥٪؟  
 ٨ - هل يختلف ارتباط بيانات السؤال السابق عن ٣٥ ، . بمستوى معنوية ٥٪؟  
 ٩ - إذا كانت :

س ر = ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩  
 ص ر = - ١٠ ، - ٨ ، - ٦ ، - ٤ ، - ٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠

فأوجد الارتباط الخطي بين المتغيرين، واختبر الفرضية القائلة بأنه لا يوجد ارتباط بين المتغيرين.

١٠ - إذا كانت :

س ر = ١٨ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٢٦ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٦ ، ٣٨  
 ص ر = ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢٠

فأوجد الارتباط الخطي بين المتغيرين، وقارن بينه وبين الارتباط في السؤال السابق، ووضح أسباب العلاقة بينهما.

- ١١ - توضح البيانات التالية مبيعات ثلاثة مراكز لتوزيع إحدى المجلات خلال ستة أشهر.  
 اختبر الفرضية القائلة بأن التوزيع لا يتحسن بمرور الزمن لكل مركز بمستوى معنوية ٥٪، والبيانات هي :

المبيعات الشهر	المركز الأول بآلاف الريالات	المركز الثاني بآلاف الريالات	المركز الثالث بآلاف الريالات
١	١٦	٥	٩
٢	١٤	٦	١١
٣	١١	٧	١٠
٤	١٢	٦	١٢
٥	١٠	٩	١١
٦	١٠	١٠	١٠

١٢ - أوجد الارتباط الخطى بين كل مركزين ، واختبر فرضية وجود ارتباط بينهما ، وفسر النتائج بعد الاختبار.

١٣ - استخدم بيانات السؤال السادس لإيجاد معامل سبيرمان للارتباط وقارن بين النتيجةين .

١٤ - استخدم بيانات السؤال التاسع لإيجاد معامل سبيرمان للارتباط ، وقارن بين النتيجةين .

١٥ - استخدم بيانات السؤال العاشر لإيجاد الارتباط بين المتغيرين بمعامل سبيرمان ، وقارن بين النتيجةين .

١٦ - استخدم بيانات السؤال الأول لإيجاد معامل سبيرمان للارتباط ، وقارن بين النتيجةين (مع السؤال الخامس) .

١٧ - استخدم بيانات السؤال الحادى عشر لإيجاد معامل سبيرمان وقارن بين النتيجةين .

١٨ - متى يتساوى معامل بيرسون مع معامل سبيرمان لنفس البيانات ؟

١٩ - إذا كانت :-

١ تعنى المركز الأول فى السؤال الحادى عشر .

٢ تعنى المركز الثانى فى السؤال الحادى عشر .

٣ تعنى المركز الثالث فى السؤال الحادى عشر

٤ تعنى الزمن فى السؤال الحادى عشر .

فأوجد :

أ -	٣,٢١	و -	١,٣٤
ب -	٤,٢١	ز -	٤٢,٣١
ج -	٣,٤١	ح -	٣١,٢٤
د -	٢,٣١	ط -	٤١,٣٢
هـ -	٣,٢٤		

٢٠ - البيانات التالية عبارة عن عينة من المتعلمين ، وعينة من الأميين ، وعدد المدخنين من كل عينة ، فهل هناك ارتباط بين التعليم وعادة التدخين ؟ والبيانات هى :

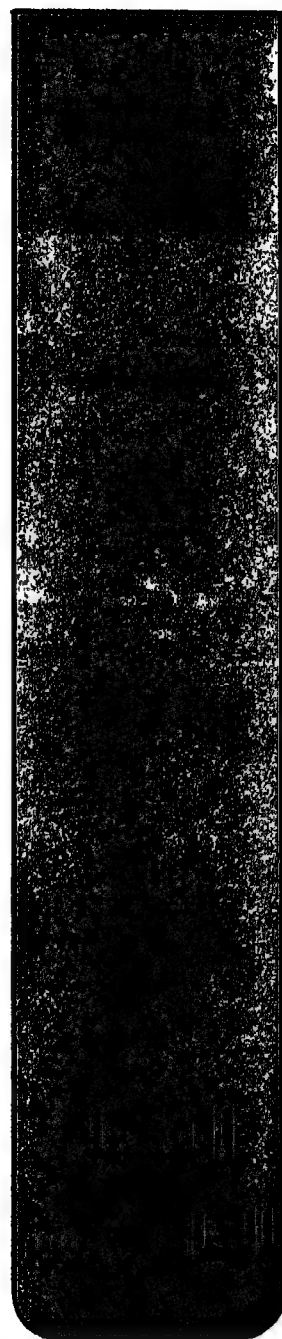
صفة التدخين	عدد المدخنين	عدد غير المدخنين
متعلم	١٠	٤٠
أمى	٤٥	٥

- ٢١ - اكتب برنامجاً بلغة بيسك لرسم بياني للبيانات الواردة في السؤال (١) .
- ٢٢ - اكتب برنامج بيسك لإيجاد الارتباط الخطي للبيانات بالسؤال (١) .
- ٢٣ - استخدم البيانات بالسؤال (٦) في برنامج لإيجاد التباين والارتباط الخطي .
- ٢٤ - استخدم البيانات الواردة بالسؤال (٦) ، واكتب برنامج بيسك لإيجاد معامل سبيرمان للارتباط .

---

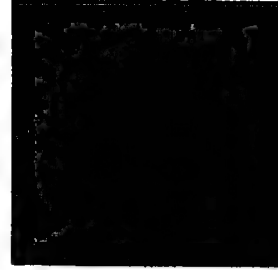
**الانحدار الخطي**  
(Linear Regression)

---





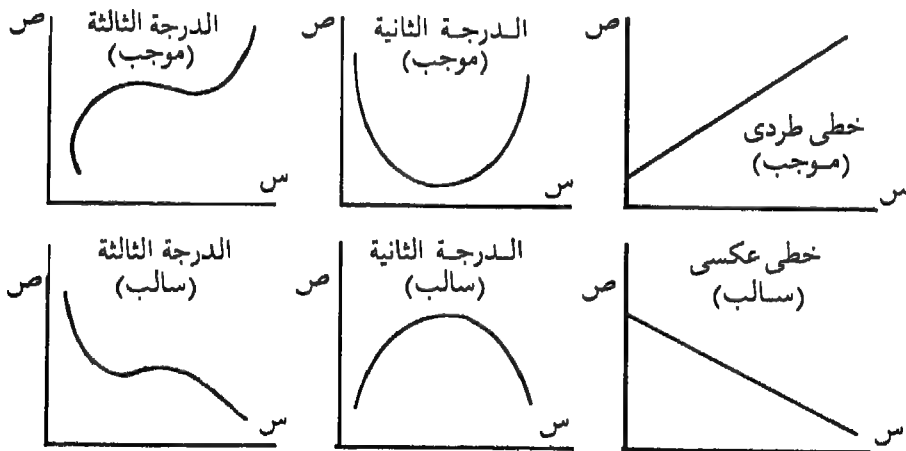
## الانحدار الخطي (Linear Regression)



### ١ - مفهوم الانحدار:

يهدف خط الانحدار الخاص بمتغيرين متصلين إلى تحديد العلاقة بين القيم العينية الشائبة ( $Y$ ،  $X$ )، باعتبار أن  $X$  دالة للمتغير  $Y$ ، بمعنى أن المتغير  $Y$  مسبب (مستقل)، والمتغير  $X$  متغير تابع.

يتلخص دور الانحدار في ثلاث مهام أساسية، أولاها : الوصف الخاص بظاهرة معينة، وثانيها : التحكم في المتغير التابع بواسطة المتغير المستقل، وثالثها : تقدير (تنبؤ) بعض قيم المتغير التابع بعد تحديد قيم معينة للمتغير المستقل. هذا، ويأتي ذلك بعد تحديد العلاقة بين المتغيرين، والتي تتمثل في معادلة قد تكون خطية أو غير خطية، اعتماداً على الشكل الذي تبينه لوحه الانتشار. وفيها يلي بعض الأمثلة لنماذج مختلفة :



شكل (١) نماذج لبعض المنحنيات.

هذا، وتنحصر مهمة هذا الفصل في الانحدار الخطى الذى يكون على النحو التالى :

$$\text{ص}_\text{ر} = (\text{أ}) + (\text{ب}) \text{ س}_\text{ر} + (\text{ج}) \text{ س}_\text{ر}^2 + (\text{د}) \text{ س}_\text{ر}^3 + \dots + \text{خ} \quad (1)$$

حيث :

ص<sub>ر</sub> متغير تابع

س<sub>ر</sub>، س<sub>ر</sub><sup>2</sup>، س<sub>ر</sub><sup>3</sup>، ... مجموعة المتغيرات المستقلة.

خ الخطأ العشوائى .

(أ) ، (ب) ، (ج) ، (د) ... هي معالم (ثوابت) المعادلة الواجب تقديرها.

## ٢ - معادلة الانحدار الخطى البسيط:

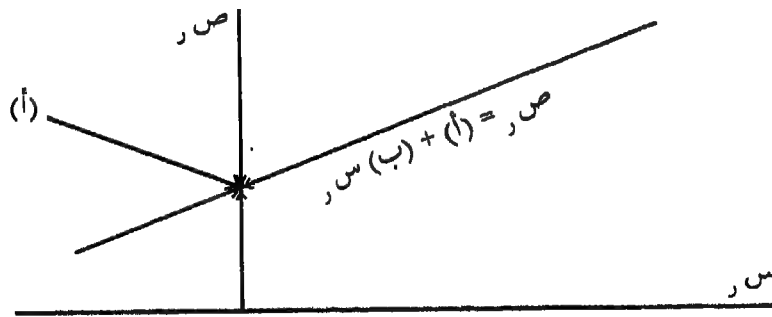
تكون معادلة الانحدار الخطى البسيط على النحو التالى :

$$\text{ص}_\text{ر} = (\text{أ}) + (\text{ب}) \text{ س}_\text{ر} \quad (2)$$

حيث :

(أ) هي الجزء المقطوع من المحور الصادى (انظر الشكل) ، أو هي المعدل العام كما يطلق عليها في بعض الحالات .

(ب) هي ميل خط الانحدار، أو كمية التغير التى تطرأ على المتغير التابع (ص<sub>ر</sub>) إذا تغير المستقل (س<sub>ر</sub>) بوحدة واحدة .



شكل (٢) : خط الانحدار البسيط



إذاً تتغير المعادلة بتغير قيمة (أ) ، أو تغير قيمة (ب) : معلمی المعادلة . لذلك فإن المعادلة الخطية المستخرجة من القيم العينية هي معادلة تقدير الثابتين (أ) و(ب) ، اعتماداً على تلك القيم . هذا ، وقد تختلف التقديرات باختلاف العينات المسحوبة من نفس المجتمع ؛ وعليه فالمعادلة التي تحسب معالمها من القيم العينية هي معادلة تقديرية ، وتكون على النحو التالي :

$$\text{ص}_ر = أ + ب \text{س}_ر \quad (٣)$$

حيث :

ص<sub>ر</sub> قيمة تقديرية للقيمة الحقيقية ص<sub>ر</sub>  
أ و ب قيمتان تقديريتان للمعلمين (أ) و (ب) على التوالي .  
يجب أن تكون ص<sub>ر</sub> أفضل مقدر لنظيرتها ص<sub>ر</sub> . أى أن الانحراف - أو الخطأ - الذي يرمز إليه بالرمز (خ) بين القيمة الحقيقية للمجتمع والقيمة التقديرية من المعادلة يجب أن يكون في أدنى حد ممكن .

بيد أن مجموع تلك الأخطاء (م خ) يساوى صفراً ، بمعنى أن :

$$\text{م خ} = \sum (\text{ص}_ر - \text{ص}_ر) = \text{صفراً} \quad (٤)$$

إذاً لا بد من اللجوء إلى مجموع مربعات تلك الأخطاء (م م خ) الذي يعرف بأنه :

$$\text{م م خ} = \sum (\text{ص}_ر - \text{ص}_ر)^2 \quad (٥)$$

هذا ، وتعرف النظرية التي تعتمد على استخدام أدنى قيمة لمجموع مربعات الأخطاء لتقدير (أ) و (ب) بنظرية المربعات الصغرى (Least Squares Method) . كذلك يتضح من تعويض المعادلة (٣) في المعادلة (٥) أن :

$$\begin{aligned} \text{م م خ} &= \sum (\text{ص}_ر - (أ + ب \text{س}_ر))^2 \\ &= \sum (\text{ص}_ر - أ - ب \text{س}_ر)^2 \end{aligned} \quad (٦)$$

و بتطبيق التفاضل الجزئي على المعادلة رقم (٦) بالنسبة إلى أ تارة ، وبالنسبة إلى ب تارة أخرى مع معادلة ناتج كل تفاضل إلى الصفر بهدف إيجاد أصغر قيمة لمجموع مربعات الأخطاء ، يكون الناتج هو المعادلتين الآتيتين التاليتين اللتين يطلق عليهما اسم المعادلتين الطبيعييتين (Normal Equations) :

$$(٧) \quad \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n = \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n$$

$$(٨) \quad \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n = \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n$$

وبحل المعادلتين (٧) و (٨) آنياً تكون :

$$(٩) \quad \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n = \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n = \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n$$

$$(١٠) \quad \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n = \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n$$

إذا :

$$(١١) \quad \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n = \sum_{r=1}^n \sum_{b=1}^n$$

مثال (١١, ١) :

البيانات التالية تمثل أرباح إحدى المؤسسات خلال ٧ سنوات ، وتكلفة الدعاية في كل سنة من تلك السنوات . أوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط للربح على الدعاية ، ثم استخدم تلك المعادلة لتقدير الربح إذا كانت تكلفة الدعاية ١٨ ألف ريال في سنة ما . والبيانات هي :

الدعاية (س ر) بآلاف الريالات	الربح (ص ر) بآلاف الريالات
١٠	٢٥
١٥	٣٥
١٤	٣٠
١٦	٤٠
١١	٢٤
٢٠	٥٠
١٩	٤٨

**الحل :**

يتضح من البيانات السابقة أن :

$$n = 7$$

أما بقية المجاميع فيمكن الحصول عليها على النحو الآتي :

رقم المشاهدة	س <sub>ر</sub>	ص <sub>ر</sub>	س <sub>ر</sub> <sup>٢</sup>	ص <sub>ر</sub> <sup>٢</sup>	س <sub>ر</sub> ص <sub>ر</sub>
١	١٠	٢٥	١٠٠	٦٢٥	٢٥٠
٢	١٥	٣٥	٢٢٥	١٢٢٥	٥٢٥
٣	١٤	٣٠	١٩٦	٩٠٠	٤٢٠
٤	١٦	٤٠	٢٥٦	١٦٠٠	٦٤٠
٥	١١	٢٤	١٢١	٥٥٧٦	٢٦٤
٦	٢٠	٥٠	٤٠٠	٢٥٠٠	١٠٠٠
٧	١٩	٤٨	٣٦١	٢٣٠٤	٩١٢
المجموع	١٠٥	٢٥٢	١٦٥٩	٩٧٣٠	٤٠١١

$$\frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \text{س}_r \text{ص}_r}{n-1} = \text{ع}_\text{س ص}$$

$$= ٣٨,٥$$

$$\frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n (\text{س}_r^2)}{n-1} = \text{ع}_\text{س}^2$$

$$= ١٤$$

$$\therefore \text{ع}_\text{س} = ٣,٧٤٢$$

$$\text{س} = ١٥$$

$$\text{ص} = ٣٦$$

$$\text{ب} = \frac{\text{ع}_\text{س ص}}{\text{ع}_\text{س}}$$

(١١)

$$\frac{38,5}{14} =$$

$$ب = 2,75$$

(٩)

$$أ = ص - ب س$$

$$10 \times 2,75 - 36 =$$

$$أ = - 5,25$$

وبالتعويض في المعادلة (٣) تكون :

$$ص, = - 5,25 + 2,75 س, ر$$

تقدير الربح إذا بلغت تكلفة الدعاية ١٨ ألف ريال هو :

$$ص, = - 5,25 + 2,75 \times 18$$

$$= 44,25 \text{ ألف ريال}$$

$$= 44250 \text{ ريالاً}$$

البرنامج التالى يقوم بإيجاد معادلة الانحدار الخطى البسيط . البيانات المستخدمة بالبرنامج والبيانات الواردة فى المثال (١١ ، ١) السابق . باستخدام المعادلة :

$$Y = A + BX$$

وباعتبار أن

$X_3$  = الوسط الحسابى للمتغير المستقل

$Y_3$  = الوسط الحسابى للمتغير التابع

$X_2$  = مجموع مربعات المتغير المستقل

$X_1$  = مجموع المتغير المستقل

وبالتالى :-

$$B = E/F$$

$$E = (S - X_1 Y_1 / N) / (N - 1) = \text{التغاير}$$

$$F = \text{تباين المتغير المستقل}$$

$$A = Y_3 - B X_3$$

```

10. REM برنامج ليجاد معادله الانحدار الخطي البسيط
20. DIM X(7),Y(7)
30. X1=0
40. Y1=0
50. X2=0
60. Y2=0
70. READ N,V
80. FOR I=1 TO N
90.   READ X(I),Y(I)
100.  X1=X1+X(I)
110.  Y1=Y1+Y(I)
120.  X2=X2+X(I)*X(I)
130.  Y2=Y2+Y(I)*Y(I)
140.  S=S+X(I)*Y(I)
150. NEXT I
160. E=(S-X1*Y1/N)/(N-1)
170. F=(X2-X1*X1/N)/(N-1)
180. F1=SQR(F)
190. X3=X1/N REM MEAN OF X
200. Y3=Y1/N REM MEAN OF Y
210. B=E/F
220. A=Y3-B*X3
230. R=A+B*V
240. REM PRINTING SECTION
250. PRINT USING 330
260. PRINT USING 320
270. PRINT USING 330
280. FOR I=1 TO N
290.   PRINT USING 340,X(I)*Y(I),Y(I)*Y(I),X(I)*X(I),Y(I),X(I),I
300. NEXT I
310. PRINT USING 330
320. PRINT USING 350,S,Y2,X2,Y1,X1
330. PRINT USING 330
340. :
350. :
360. PRINT #####
370. PRINT #####
380. PRINT , A; '= '
390. PRINT , B; '= '
400. PRINT
410. DATA 7,18,10,25,15,35,14,30,16,40,11,24,20,50,19,48
420. END

```

# المخرجات

رقم	س	س	س	س	س
1	10	25	100	625	250
2	15	35	225	1225	350
3	15	35	225	1225	350
4	16	40	256	1600	400
5	19	50	361	2300	475
6	20	40	160	1600	400
7	11	24	121	528	264
المجموع	105	252	1659	9730	4011

$$-5.25 = 1$$

$$2.75 = 4$$

### ٣ - خصائص معادلة الانحدار الخطى البسيط :

(أ) المعدل العام :

$$(٣) \quad \text{ص}_ر = أ + ب \text{ س}_ر$$

$$(٩) \quad أ = \text{ص}_ر - ب \text{ س}_ر$$

بتعويض (٩) في (٣) تكون :

$$\text{ص}_ر = \text{ص}_ر - ب \text{ س}_ر + ب \text{ س}_ر$$

$$(١٢) \quad \text{ص}_ر = \text{ص}_ر + ب (\text{س}_ر - \text{س}_ر)$$

فإذا كانت

$$\text{س}_١ = \text{س}_٢ = \text{س}_٣ = \dots = \text{س}_ر = \dots = \text{س}_ن$$

فإن :

$$\text{ص}_ر = \text{ص}_ر$$

أى أن  $\text{ص}_ر$  هى المعدل العام (الوسط الحسابى) إذا كانت  $\text{س}_ر$  ليست متغيرة .

(ب) خط الانحدار يمر بنقطة (س , ص) :

$$(١٢) \quad \text{ص}_ر = \text{ص}_ر + ب (\text{س}_ر - \text{س}_ر)$$

$$\text{إذا كانت } \text{س}_ر = \text{س}_ر \text{ فإن :}$$

$$\text{ص}_ر = \text{ص}_ر$$

أى أن الخط يمر بنقطة الوسطين (س , ص) . ففى المثال السابق مثلاً كانت المعادلة هى :

$$\text{ص}_ر = - ٢٥ , ٢٥ + ٢ , ٧٥ \text{ س}_ر$$

$$\text{فإذا كانت } \text{س}_ر = \text{س}_ر = ١٥$$

$$\text{فإن } \text{ص}_ر = - ٢٥ , ٢٥ + ٢ , ٧٥ \times ١٥$$

$$= ٣٦ \text{ وهى } \text{ص}_ر$$

(ج) مربع الارتباط الخطي هو المقياس لدقة التقدير :

تباين المتغير التابع هو :

$$(13) \quad \frac{\sum (ص - ص_r)^2}{n - 1} = ع^2$$

وهذا يعنى أن مجموع مربعات الانحرافات الكلى (م م ك) للمتغير التابع هو :

$$(14) \quad \sum (ص - ص_r)^2 = م م ك$$

أما تباين التقدير (ص ر) فهو :

$$(15) \quad \frac{\sum (ص - ص_r)^2}{n - 1} = ع^2$$

إذاً فمجموع مربعات الانحرافات بسبب الانحدار (م م ر) هو :

$$(16) \quad \sum (ص - ص_r)^2 = م م ر$$

هذا ، ويلاحظ من المعادلة (5)، والمعادلة (14)، والمعادلة (16) أن :

$$م م ك = م م ر + م م خ$$

أى أن :

$$(17) \quad \sum (ص - ص_r)^2 = \sum (ص - ص_r)^2 + \sum (ص - ص_r)^2$$

وعليه فنسبة م م ر إلى م م ك هى نسبة التغيرات التى تفسرها (تكشفها) المعادلة .  
ويطلق على النسبة المئوية التى تفسرها معادلة الانحدار بمعامل التحديد  
(Coefficient of Determination) وهى قياس لمستوى دقة المعادلة ؛ لأنها تمثل عدد النقاط الواقعة

على الخط من كل مائة نقطة . وبذلك يمكن تفسير معامل التحديد بأنه يساوى  $\frac{م م ر}{م م ك}$

أى أن :

$$(١٨) \quad ١٠٠ \times \frac{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2} = \text{معامل التحديد}$$

إلا أن :

$$(١٢) \quad ص_r = ص_n + ب(ص_r - ص_n)$$

وبتعويض (١٢) في (١٨) يكون :

$$(١٩) \quad \frac{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2} = \frac{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}$$

$$= \frac{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}$$

$$= \frac{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}$$

$$(٢٠) \quad \frac{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2} =$$

وبالتعويض عن قيمة (ب) الواردة في المعادلة (١١) على النحو التالي :

$$(١١) \quad \frac{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2} = ب$$

يصبح معامل التحديد هو :

$$١٠٠ \times \frac{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2} \times \left( \frac{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2}{\sum_{r=1}^n (ص_r - ص_n)^2} \right)$$

أى أن :



معامل التحديد

$$100 \times \frac{(ع س ص)^2}{ع س ص \times ع س ص} =$$

$$(21) \quad 100 \times \frac{ع س ص}{ع س ص} \times \frac{ع س ص}{ع س ص} =$$

هذا ويتضح من (21) أن :

$$(22) \quad \text{معامل التحديد} = ر \times 100$$

$$(23) \quad 100 \times ر^2 =$$

$$100 \times \text{مربع الارتباط الخطي} =$$

مثال (2, 11) :

أوجد معامل التحديد لخط الانحدار الوارد في المثال (1).

الحل :

$$ع س = 3,742$$

$$ع ص = 10,472$$

$$ع س ص = 38,5$$

$$ر = \frac{ع س ص}{ع س ص \times ع س ص}$$

$$= \frac{38,5}{3,742 \times 10,472}$$

$$= 0,982$$

$$(23) \quad \text{معامل التحديد} = ر^2 \times 100 =$$

$$(0,982)^2 \times 100 =$$

$$96,4\%$$

بمعنى أن حوالي 96 من كل مائة نقطة تكون على خط الانحدار.

البرنامج التالي يقوم بحساب معامل التحديد لخط الانحدار الوارد في المثال (١١، ١) السابق ، اعتماداً على أن معامل التحديد هو مربع الارتباط الخطي حيث الارتباط الخطي هو :

$$R = \frac{E}{FG}$$

E = التباين

F = الانحراف المعياري للمتغير المستقل

G = الانحدار المعياري للمتغير التابع

```

10 REM برنامج لايجاد معامل التحديد
20 N=7
30 S=4011
40 X1=105 REM SUM OF X
50 X2=1659 REM SUM OF X SQUARE
60 Y1=252 REM SUM OF Y
70 Y2=9730 REM SUM OF Y SQUARE
80 E=(S-X1*Y1/N)/(N-1)
90 F=SQR((X2-X1*X1/N)/(N-1))
100 G=SQR((Y2-Y1*Y1/N)/(N-1))
110 R=E/(F*G)
120 PRINT ,E; 'عس'
130 PRINT
140 PRINT ,F; 'عس'
150 PRINT
160 PRINT ,G; 'عس'
170 PRINT
180 PRINT ,R*R; 'اذن معامل التحديد'
190 PRINT
200 END

```

#### المخرجات

```

38.5      = عس
3.741657  = عس
10.47218  = عس
.965426   = اذن معامل التحديد

```

#### ٤ = انحرافات التقديرات :

(أ) الخطأ المعياري لخط الانحدار (ع) :

تسمى الإحصائية  $\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n-2}$  بتباين خط الانحدار (ع<sup>٢</sup>) أو تباين الخطأ (RESIDUAL).

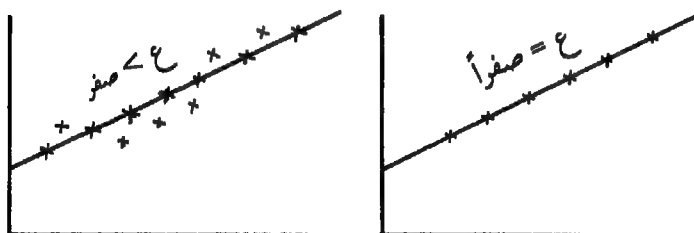
أى أن :

$$(٢٤) \quad \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n-2} = ع^2$$

بينما يسمى الجذر التربيعي الموجب لتباين الخطأ بالخطأ المعياري للتقدير .  
إذاً فالخطأ المعياري لتقدير ص هو :

$$(٢٥) \quad \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n-2}} = ع$$

$$\sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n-2}} = ع$$



شكل (٣) : الخطأ المعياري للتقدير ع ≤ صفر

هذا ، ولقد ورد في المعادلة (١٧) أن :

$$(١٧) \quad م م ك = م م ر + م م خ$$

إذاً :

$$(٢٦) \quad م م خ = م م ك - م م ر$$

$$(٢٧) \quad م م خ = \sum (y - \hat{y})^2 - \sum (y - \hat{y})^2$$

أما الخطأ المعياري للميل (ب) فهو :

$$(28) \quad \frac{ع}{\sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{n-1}}} = ع ب$$

بينما يعرف الخطأ المعياري للمعلم أ بأنه :

$$(29) \quad \frac{ع}{\sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{n-1}}} = ع ا$$

وأما انحراف ص<sub>ر</sub> المعروف باسم وسط مربع الخطأ (وم خ) فهو :

$$(30) \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{\sum (س - \bar{س})^2}{n-1} + \frac{1}{n} \right] ع = م خ$$

فترة الثقة عند أى قيمة (س<sub>ر</sub>) للقيمة التقديرية ص<sub>ر</sub> بمستوى معنوية محدد هي :

$$(31) \quad \frac{\sum (س - \bar{س})^2}{n-1} + \frac{1}{n} \sqrt{ع \pm ت} ع$$

حيث ت هي القيمة المستخرجة من جدول توزيع ت (t) على (ن - ٢) درجات حرية.

## ٥ - الانحدار الثنائي :

يسمى الانحدار بالانحدار المتعدد إذا كان المتغير التابع (ص<sub>ر</sub>) يعتمد على عدة متغيرات مستقلة (س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub> ، ... ، س<sub>٣</sub>). أما المتغير الثنائي فهو أحد أنواع الانحدار المتعدد، فنموذجه يتكون من متغيرين مستقلين فقط، أى أنه على النحو الآتى :

$$(32) \quad ص ر = ا + ب س ا + ج س ر$$

ولإيجاد قيم المعالم أ ، ب ، ج لابد من استخدام ثلاث معادلات طبيعية على النحو التالي :

$$(33) \quad \text{ص ر} = \text{أ ن} + \text{ب ج} + \text{ج س} + \text{س ر}$$

$$(34) \quad \text{ص ر} + \text{ص ر} = \text{أ ج} + \text{س ر} + \text{ب ج} + \text{س ر} + \text{ج س} + \text{س ر} + \text{س ر}$$

$$(35) \quad \text{ص ر} + \text{ص ر} = \text{أ ج} + \text{س ر} + \text{ب ج} + \text{س ر} + \text{ج س} + \text{س ر} + \text{س ر}$$

**مثال (١١, ٣) :**

استخدم البيانات التالية لإيجاد معادلة انحدار الدخل (ص ر) على سنوات الخبرة (س ر)  
وعدد سنوات الدراسة (س ر) والبيانات هي :

الرقم	الدخل الشهري بآلاف الريالات	سنوات الخبرة	عدد سنوات الدراسة
١	٣	٢٣	٩
٢	٦	٢٨	١٢
٣	٥	٢١	١٢
٤	٨	٢٣	٢٢
٥	١٠	٣٠	١٦
٦	١٥	٣٢	١٨
٧	٩	٢٥	٢٣
المجموع	٥٦	١٨٢	١١٢

## الحل

ص	س	س	س	س	س	س	س
ص	س	س	س	س	س	س	س
٣	٢٣	٩	٦٩	٥٢٩	٢٠٧	٢٧	٨١
٦	٢٨	١٢	١٦٨	٧٨٤	٣٣٦	٧٢	١١٤
٥	٢١	١٢	١٠٥	٤٤١	٢٥٢	٦٠	١٤٤
٨	٢٣	٢٢	١٨٤	٥٢٩	٥٠٦	١٧٦	٤٨٤
١٠	٣٠	١٦	٣٠٠	٩٠٠	٤٨٠	١٦٠	٢٥٦
١٥	٣٢	١٨	٤٨٠	١٠٢٤	٥٧٦	٢٧٠	٣٢٤
٩	٢٥	٢٣	٢٢٥	٦٢٥	٥٧٥	٢٠٧	٥٢٩
٥٦	١٨٢	١١٢	١٥٣١	٤٨٣٢	٢٩٣٢	٩٧٢	١٩٦٢

$$(٣٣) \quad ٣ \text{ ص} = ٢٣ \text{ س} + ٩ \text{ س} + ٦٩ \text{ س} + ٥٢٩ \text{ س}$$

$$(٣٤) \quad ٦ \text{ ص} = ٢٨ \text{ س} + ١٢ \text{ س} + ١٦٨ \text{ س} + ٧٨٤ \text{ س}$$

$$(٣٥) \quad ٥ \text{ ص} = ٢١ \text{ س} + ١٢ \text{ س} + ١٠٥ \text{ س} + ٤٤١ \text{ س}$$

بالتعويض في المعادلات السابقة من البيانات بالجدول :

$$(٣٣) \quad ٥٦ = ١٨٢ + ١١٢ + ٢٩٣٢$$

$$(٣٤) \quad ١٥٣١ = ١٨٢ + ٤٨٣٢ + ٢٩٣٢$$

$$(٣٥) \quad ٩٧٢ = ١١٢ + ٢٩٣٢ + ١٩٦٢$$

بضرب المعادلة (٣٣)  $\times ٢٦$  :

$$(٣٣) \quad ١٤٥٦ = ١٨٢ + ٤٧٣٢ + ٢٩١٢$$

$$(٣٤) \quad ١٥٣١ = ١٨٢ + ٤٨٣٢ + ٢٩٣٢$$

$$(٣٦) \quad ٧٥ = ١٠٠ + ٢٠$$

بضرب (٣٣)  $\times ١٦$  :

$$(٣٥) \quad ٩٧٢ = ١١٢ + ٢٩٣٢ + ١٩٦٢$$

$$(33) \quad 896 = 112 + 2912 + 1792 \text{ ج}$$

$$(37) \quad \therefore 76 = 20 + 170 \text{ ج}$$

بحل المعادلتين (36) و (37) آنياً تكون :

$$(37) \quad 380 = 100 + 850 \text{ ج}$$

$$(36) \quad 75 = 100 + 20 \text{ ج}$$

$$\therefore 830 = 305 \text{ ج}$$

$$\text{ج} = 3,367$$

$$\text{ب} = 1,680$$

$$\text{أ} = -15,55$$

ومن ثم تصبح معادلة الانحدار الثنائي هي :

$$\text{ص} = -15,55 + 1,68 \text{ س} + 3,367 \text{ س}^2$$

ويبدو جلياً من الوارد سابقاً أن التعامل مع الانحدار المتعدد ليس سهلاً، خاصة إذا كان عدد المتغيرات كبيراً . ولهذا السبب تستخدم طريقة المصفوفات الواردة بعد، والتي تستخدم فيها الحاسبات الآلية كما سوف يرد فيما بعد.

## ٦ - الانحدار بالمصفوفات :

يسمى النموذج :

$$(2) \quad \text{ص} = \text{أ} + \text{ب س} \text{ ر}$$

بالنموذج غير المركزي، بينما يسمى النموذج :

$$(38) \quad \text{ص} = \text{أ} + \text{ب (س - س')} \text{ ر}$$

بالنموذج المركزي. وتكون قيمة المعلم الأول  $\text{أ} = \text{ص}$  في حالة النموذج المركزي، بينما تتساوى قيمة  $\text{ب}$  في النموذجين.

وسواء كان النموذج مركزياً أو غير مركزي، أو كان النموذج بسيطاً أو خطياً متعدداً ، فمن الممكن عرضه على النحو التالي :

(٣٩)

$$\underline{\text{ص}} = \underline{\text{س}} \underline{\text{ب}} + \underline{\text{خ}}$$

وذلك باعتبار أن :

$$\underline{\text{ص}} = \text{متجهاً عمودياً من الرتبة } 1 \times \underline{\text{ن}}$$

$\underline{\text{س}} =$  مصفوفة المتغيرات المستقلة، وهى من الرتبة  $\underline{\text{ث}} \times \underline{\text{ن}}$  حيث  $\underline{\text{ث}}$  هى عدد المعالم المطلوب تقديرها. كما يجب الفصل هنا بين النموذج المركزى وغير المركزى إذا أن  $\underline{\text{س}}$  تمثل المتغيرات المستقلة فى حالة النموذج غير المركزى، وتمثل انحرافات المتغيرات فى حالة النموذج المركزى.

$$\underline{\text{ب}} = \text{متجهاً عمودياً من الرتبة } 1 \times 1.$$

إذا فالنموذج الخاص بالقيم التقديرية يكون على النحو التالى :

(٤٠)

$$\underline{\text{ص}} = \underline{\text{س}} \underline{\text{ب}}$$

يمكن تمثيله بالمصفوفات على النحو الآتى :

$$(41) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\text{ب}}_1 \\ \underline{\text{ب}}_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{س}_{12} & \text{س}_{11} & 1 \\ \text{س}_{22} & \text{س}_{21} & 1 \\ \text{س}_{32} & \text{س}_{31} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{س}_{\text{ان}} & \text{س}_{1\text{ان}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\text{ص}}_1 \\ \underline{\text{ص}}_2 \\ \underline{\text{ص}}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\text{ص}}_{\text{ن}} \end{pmatrix}$$

وبضرب طرفى المعادلة (٤٠) فى  $\underline{\text{س}}$  (مدور المصفوفة  $\underline{\text{س}}$ ) تكون :

(٤٢)

$$\underline{\text{س}} \underline{\text{ص}} = \underline{\text{س}} \underline{\text{س}} \underline{\text{ب}}$$

وبالضرب المسبق لطرفى المعادلة السابقة فى مقلوب  $\underline{\text{س}}$  يمكن الحصول على النموذج الخطى لأى عدد من المتغيرات المستقلة. وذلك على النحو التالى :

$$\begin{aligned} (\underline{\text{س}} \underline{\text{س}})^{-1} \underline{\text{س}} \underline{\text{ص}} &= (\underline{\text{س}} \underline{\text{س}})^{-1} \underline{\text{س}} \underline{\text{س}} \underline{\text{ب}} \\ \underline{\text{ب}} &= (\underline{\text{س}} \underline{\text{س}})^{-1} \underline{\text{س}} \underline{\text{ص}} \end{aligned}$$



يبد أن إيجاد النظير الضربي يكون مطولاً إذا كان عدد المتغيرات المستقلة كبيراً . لذلك تستخدم الحاسبات الآلية كثيراً في هذا المجال .

### ١ - الانحدار الخطي البسيط بالمصفوفات :

(٤٠)

$$\underline{\text{ص}} = \underline{\text{س}} \underline{\text{ب}}$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{س}_1 & & & & & \end{array} \right) = \underline{\text{س}}$$

$$\underline{\text{ب}} = (\text{أ} \text{ ب})$$

$$\underline{\text{ص}} = (\text{ص}_1 \text{ ص}_2 \text{ ص}_3 \text{ ص}_4 \text{ ص}_5 \text{ ص}_6 \text{ ص}_7 \text{ ص}_8 \text{ ص}_9 \text{ ص}_{10})$$

ومن ثم فإن :

$$\left( \begin{array}{c} \text{أ} \\ \text{ب} \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} \text{س}_1 & 1 \\ \text{س}_2 & 1 \\ \text{س}_3 & 1 \\ : & : \\ : & : \\ \text{س}_n & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{ص}_1 \\ \text{ص}_2 \\ \text{ص}_3 \\ : \\ : \\ \text{ص}_n \end{array} \right)$$

ويتضح من المعادلة السابقة أن :

$$\text{ص}_1 = \text{أ} + \text{ب س}_1$$

$$\text{ص}_2 = \text{أ} + \text{ب س}_2$$

$$\text{ص}_3 = \text{أ} + \text{ب س}_3$$

:

:

:

$$\text{ص}_n = \text{أ} + \text{ب س}_n$$

$$\begin{pmatrix} 1س \\ 2س \\ 3س \\ \vdots \\ 1س \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1س & 2س & 3س \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1س \end{pmatrix} = \underline{\underline{1س}} \underline{\underline{1س}}$$

$$(44) \quad \begin{bmatrix} 1س & 2س \\ 2س & 3س \end{bmatrix} =$$

إذا  $\underline{\underline{1س}} \underline{\underline{1س}}$  مصفوفة متماثلة على قطرها الرئيسي عدد المتغيرات ومجموع مربعاتها، وعلى القطر الثانوي مجموع المتغيرات.

$$\begin{pmatrix} 1ص \\ 2ص \\ 3ص \\ \vdots \\ 1ص \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1س & 2س & 3س \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1س \end{pmatrix} = \underline{\underline{1س}} \underline{\underline{1ص}}$$

$$(45) \quad \begin{pmatrix} 1ص & 2ص \\ 2ص & 3ص \end{pmatrix} = \underline{\underline{1س}} \underline{\underline{1ص}} \therefore$$

فهى إذا متجه عمودى من الرتبة الثانية، ويتكون من مجموع المتغيرات التابعة ومجموع مضاريب تلك المتغيرات فى المتغيرات المستقلة.

$$(43) \quad \underline{\underline{ب}} = (\underline{\underline{1س}} \underline{\underline{1س}})^{-1} \underline{\underline{1س}} \underline{\underline{1ص}}$$

$$1^{-1} \begin{bmatrix} 1س & 2س \\ 2س & 3س \end{bmatrix} = 1^{-1} (\underline{\underline{1س}} \underline{\underline{1ص}})$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \overline{z}_r^1 & \overline{z}_r^2 \\ n & \overline{z}_r \end{bmatrix} \frac{1}{\left( \frac{\overline{z}_r^2}{n} - \overline{z}_r \right)} = \\ (46) \quad & \begin{bmatrix} \overline{z}_r^1 - \overline{z}_r^2 & \overline{z}_r^2 \\ n & \overline{z}_r \end{bmatrix} \frac{1}{\left( \frac{\overline{z}_r^2}{n} - \overline{z}_r \right)} = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{z}_r^1 \\ \overline{z}_r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{z}_r^1 - \overline{z}_r^2 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{\left( \frac{\overline{z}_r^2}{n} - \overline{z}_r \right)} = \frac{\overline{z}_r^1}{\overline{z}_r} \cdot \frac{1}{\overline{z}_r} =$$

$$(47) \quad \begin{bmatrix} \overline{z}_r^1 - \overline{z}_r^2 & \overline{z}_r^2 \\ \overline{z}_r^1 - \overline{z}_r^2 + \overline{z}_r^2 & \overline{z}_r \end{bmatrix} \frac{1}{\left( \frac{\overline{z}_r^2}{n} - \overline{z}_r \right)} =$$

فالمقدار الأول يمكن عرضه على النحو التالي :

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{z}_r^1 - \overline{z}_r^2}{\left[ \frac{\overline{z}_r^2}{n} - \overline{z}_r \right]} = \\ & \frac{\overline{z}_r^1 - \overline{z}_r^2 + \overline{z}_r^2}{\left[ \frac{\overline{z}_r^2}{n} - \overline{z}_r \right]} = \end{aligned}$$

$$\frac{\left[ \frac{\sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S x_{rs}}{N} - \sum_{r=1}^R x_{r..} \right] \sum_{r=1}^R x_{r..} - \left[ \frac{\sum_{r=1}^R x_{r..}^2}{N} - \sum_{r=1}^R x_{r..}^2 \right] \sum_{r=1}^R x_{r..}}{\left[ \frac{\sum_{r=1}^R x_{r..}^2}{N} - \sum_{r=1}^R x_{r..}^2 \right] N} =$$

$$= \frac{\left[ \frac{\sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S x_{rs}}{N} - \sum_{r=1}^R x_{r..} \right]}{\frac{\sum_{r=1}^R x_{r..}^2}{N} - \sum_{r=1}^R x_{r..}^2} = \bar{c}_s - \bar{c}_r$$

$$= \bar{c}_s - \bar{c}_r$$

وأما المقدار الثاني فهو :

$$b = \frac{\frac{\sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S x_{rs}}{N} - \sum_{r=1}^R x_{r..}}{\left( \frac{\sum_{r=1}^R x_{r..}^2}{N} - \sum_{r=1}^R x_{r..}^2 \right)}$$

وبالتالى فإن :

$$(س_{س})^{-1} س_{س} = \underline{ب} \quad (٤٣)$$

حيث  $\underline{ب}$  هي متجه المعالم، وأولها أ وثانيها ب. هذا ويمكن توضيح ذلك بتطبيق طريقة المصفوفات على المثال رقم (١) ، ومن ثم مقارنة النتائج فى المثالين .

### مثال (٤, ١١):

استخدم البيانات الواردة في مثال (١) لإيجاد معادلة الانحدار الخطى البسيط للربح على الدعاية . والبيانات هي :

الرقم	الدعاية (س ر)	الربح (ص ر)
١	١٠	٢٥
٢	١٥	٣٥
٣	١٤	٣٠
٤	١٦	٤٠
٥	١١	٢٤
٦	٢٠	٥٠
٧	١٩	٤٨
المجموع	١٠٥	٢٥٢

### الحل :

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 15 & 1 \\ 14 & 1 \\ 16 & 1 \\ 11 & 1 \\ 20 & 1 \\ 19 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 19 & 20 & 11 & 16 & 14 & 15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 & 7 \\ 1659 & 105 \end{pmatrix}$$

وبلاحظ هنا بالمقارنة مع حل المثال رقم (١) أن :

$$n = 7$$

$$\sum s_r = 105$$

$$\sum s_r^2 = 1659$$

$$\begin{pmatrix} ٢٥ \\ ٣٥ \\ ٣٠ \\ ٤٠ \\ ٢٤ \\ ٥٠ \\ ٤٨ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١٩٠ & ٢٠ & ١١ & ١٦ & ١٤ & ١٥ & ١٠ \end{pmatrix} = \underline{\underline{\text{س١ ص}}}$$

$$\begin{pmatrix} ٢٥٢ \\ ٤٠١١ \end{pmatrix} =$$

ومن المثال رقم (١) اتضح أن

$$\Sigma \text{ ص ر} = ٢٥٢$$

$$\Sigma \text{ س ر ص} = ٤٠١١$$

$$\begin{bmatrix} ١٠٥ & ٧ \\ ١٦٥٩ & ١٠٥ \end{bmatrix}^{-١} = \underline{\underline{\text{س١ س}^{-١}}}$$

$$\begin{bmatrix} ١٠٥- & ١٦٥٩ \\ ٧ & ١٠٥- \end{bmatrix} \frac{١}{٥٨٨} =$$

(٤٣)

$$\underline{\underline{\text{ب}}} = \underline{\underline{\text{س١ س}^{-١}}} \underline{\underline{\text{س١ ص}}}$$

$$\begin{bmatrix} ٢٥٢ \\ ٤٠١١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٠٥- & ١٦٥٩ \\ ٧ & ١٠٥- \end{bmatrix} \frac{١}{٥٨٨} =$$

$$\begin{pmatrix} ٥,٢٥- \\ ٢,٧٥ \end{pmatrix} =$$

$$٥,٢٥- = \text{أ} \therefore$$

$$٢,٧٥ = \text{ب}$$

ومعادلة الانحدار الخطي هي :

$$\text{ص ر} = -٥,٢٥ + ٢,٧٥ \text{ س ر}$$

وهي نفس معادلة المثال رقم (١).

### ب - استنتاجات أخرى للمصفوفات العاكسة :

يمكن إعادة صياغة المعادلة (٢٨) الخاصة بتباين المتغير ب على النحو التالي :

$$\frac{{}^2\text{ع}}{\overline{\text{س}}_r - \text{س}^2} = {}^2\text{ع}_\text{ب}$$

$$\frac{{}^2\text{ع}}{\overline{\text{س}}_r - \frac{\overline{\text{س}}_r^2}{\text{ن}}} = {}^2\text{ع}_\text{ب}$$

(٢٨)

والمعادلة (٢٩) الخاصة بتباين أ على النحو التالي :

$$\frac{{}^2\text{ع} \overline{\text{س}}_r - \text{س}^2 \overline{\text{س}}_r}{\overline{\text{س}}_r - \frac{\overline{\text{س}}_r^2}{\text{ن}}} = {}^2\text{ع}_\text{أ}$$

$$\frac{{}^2\text{ع} \overline{\text{س}}_r - \text{س}^2 \overline{\text{س}}_r}{\overline{\text{س}}_r - \frac{\overline{\text{س}}_r^2}{\text{ن}}} = {}^2\text{ع}_\text{أ}$$

(٢٩)

وأما تغاير المعلمين أ ، ب فهو :

$$\text{ع}_\text{أ} = \text{ع}_\text{ب} \quad (\text{أ ، ب})$$

$$\text{ع} = (\text{ص} - \text{ب} \text{ س} , \text{ب})$$

$$\text{بيد أن ع} = (\text{ص} , \text{ب}) = \text{صفراً}$$

$$\text{ع} = \text{ع}_\text{أ} = \text{ع}_\text{ب} = (\text{ص} - \text{ب} \text{ س} - \text{ب}^2 \text{ س}^2)$$

$$\text{ع} = (-\text{ب}^2 \text{ س}^2)$$

$$= -\text{س}^2 \text{ع} (\text{ب}^2)$$

$$\frac{-\text{س}^2 \text{ع} (\text{ب}^2)}{\overline{\text{س}}_r - \frac{\overline{\text{س}}_r^2}{\text{ن}}} = {}^2\text{ع}_\text{أ}$$

(٤٨)

وبالتالى يمكن عرض مصفوفة تشتت المتغيرين على النحو الآتى :

$$\begin{bmatrix} ع^2 ا ب & ع ا ب^2 \\ ع ا ب^2 & ع^2 ب ا \end{bmatrix} = ع ا ب$$

$$(٤٩) \quad \begin{bmatrix} \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{n} - \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{n}}{n} & \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{n} - \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{n}}{n} \\ \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{n} - \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{n}}{n} & \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{n} - \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{n}}{n} \end{bmatrix} ع^2 =$$

وبلاحظ أن المعادلة المبينة بالمصفوفة (٤٦) هى نفس المصفوفة السابقة (٤٩) بعد ضربها فى  $ع^2$  . لذا فالمصفوفة المتماثلة (س/س)  $ع^2$  تستخدم أيضاً كمصفوفة تشتت للمعالم بعد ضربها فى  $ع^2$  التى سيتم تقديرها على ما يلى :

اتضح مما مضى أن :

$$\begin{aligned} م م ر &= ر (ص - ص) ع^2 \\ م ب &= ب (س - س) ع^2 \end{aligned} \quad (٢٠)$$

وهى خاصة بمجموع مربعات الانحدار بسبب ب وحدها دون أ . أما مجموع المربعات بسبب أ وحدها فيسمى معامل تصحيح الوسط (correction for Mean) وهو عبارة عن :

$$\begin{aligned} م م أ &= أ ن ص ع^2 \\ م ب &= \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{n}}{n} \end{aligned} \quad (٥٠)$$

وبالتالى فإن :



$$(٥١) \quad \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}} + {}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}^2 = \mathbb{M} \mathbb{M} + \mathbb{M} \mathbb{M}$$

بید آن :

$$(١٠) \quad \frac{{}^2[\mathbb{Z} (\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) (\text{ص } \mathbb{R} - \text{س})]}{{}^2[\mathbb{Z} (\text{س } \mathbb{R} - \text{س})]} = {}^2\mathbb{B}$$

$$\frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}} + \frac{{}^2[\mathbb{Z} (\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) (\text{ص } \mathbb{R} - \text{س})]}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} = \mathbb{M} \mathbb{M} + \mathbb{M} \mathbb{M}$$

$$\frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}} + \frac{{}^2[\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R} - \mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R}]}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} =$$

$$\frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}} + \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})^2}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} + \frac{{}^2\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R} \mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R}}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} - \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} =$$

$$\left[ 1 + \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} \right] \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}} + \frac{{}^2\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R} \mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R}}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} - \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} =$$

$$\left[ \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R}) + \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}}}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} \right] \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}} + \frac{{}^2\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R} \mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R}}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} - \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} =$$

$$\left[ \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}} - \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}} + \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}} \right] \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{\mathbb{N}} + \frac{{}^2\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R} \mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R}}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} - \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} =$$

$$(٥٢) \quad \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})^2}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} + \frac{{}^2\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R} \mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R}}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} - \frac{{}^2(\mathbb{Z} \text{ ص } \mathbb{R})}{{}^2(\text{س } \mathbb{R} - \text{س}) \mathbb{Z}} =$$





$$\begin{pmatrix} 5,25 \\ 2,75 \end{pmatrix} = \text{ب}$$

$$\begin{bmatrix} 105 & 1659 \\ 7 & 105 \end{bmatrix} \frac{1}{588} = \text{س (س)}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 252 \\ 4011 \end{pmatrix} = \text{س ص}$$

$$\text{ص ص} = \text{ص ص}^2$$

$$9730 =$$

$$7 = \text{ن}$$

$$36 = \text{ص}$$

$$\text{م م ر} = \text{ب س ص} - \text{ن ص}^2$$

$$36 \times 36 \times 7 - \begin{pmatrix} 252 \\ 4011 \end{pmatrix} (2,75 \ 5,25) =$$

$$9072 - 9707,25 =$$

$$635,25 =$$

$$\text{م م ك} = \text{ص ص} - \text{ن ص}^2$$

$$9072 - 9730 =$$

$$658 =$$

ف 5,1	متوسط المربعات	درجات الحرية	مجموع المربعات	مصدر التباين
139,615	635,25	1	635,25	الانحدار (ب)
	4,55	5	22,75	الخطأ (بالطرح)
		6	658	المجموع الكلي

١ - اختبار الفرضية ف : ب = صفرأ  
يتضح من جدول تحليل التباين أن إحصائية الاختبار تساوى ١٣٩,٦١٥ وهى جوهريه بمستوى معنوية ٩٥٪ مقارنة بتوزيع ف (١,٥).

٢ - يمكن تقدير ع<sup>٢</sup> بمتوسط مربعات الخطأ، وبضرب ع<sup>٢</sup> فى مقلوب س<sub>ب</sub> يمكن الحصول على مصفوفة التشتت التى يكون على قطرها تباينات المعالم، وحول القطر التغيرات. إذاً فهى:

$$\begin{bmatrix} ١٠٥ - & ١٦٥٩ \\ ٧ & ١٠٥ - \end{bmatrix} \frac{٤,٥٥}{٥٨٨}$$

٣ - معامل التحديد (ر<sup>٢</sup>):

$$\begin{aligned} \frac{٢٢٢}{٢٢٢} &= ر^2 \\ \frac{٦٣٥,٢٥}{٦٥٨} &= \\ ٠,٩٦٥ &= \end{aligned}$$

وهى نفس نتيجة المثال (٢) تقريباً.

يتضح مما مضى أن طريقة المصفوفات فى الانحدار تتميز بما يلى:

- ١ - إمكانية تطبيق نفس المعادلة [ب = (س<sub>ب</sub> س<sub>ب</sub><sup>-١</sup> س<sub>ص</sub>] لتقدير المعالم لأى نموذج انحدار خطى مهما تكن المتغيرات.
- ٢ - سهولة تطبيق معادلاتها، خاصة لإيجاد معامل التحديد وتباينات وتغيرات المتغيرات؛ وذلك لأن بعض المصفوفات تستخدم لتنفيذ أكثر من مهمة واحدة.
- ٣ - سهولة تطبيقاتها بالحاسب الآلى، وبلغه البيسك؛ للاستفادة من سرعة ودقة الحاسبات خاصة وهناك دالة خاصة للمصفوفات فى لغة البيسك (MAT Function).

#### الانحدار المتعدد بالمصفوفات :

ورد فى أول وثائى خواص استخدام المصفوفات إمكانية استخدام نفس الأسلوب لأى عدد من المتغيرات. والمثال التالى هو إعادة للمثال (٣) الخاص بمتغيرين.

### مثال (١١٦) :

استخدم البيانات الواردة في المثال (٣) لإيجاد معادلة الانحدار الخطي بالمصفوفات لتقدير الدخل من المدة (س<sub>١</sub>) وعدد سنوات الدراسة . والبيانات هي :

ص	س <sub>١</sub>	س <sub>٢</sub>
٣	٢٣	٩
٦	٢٨	١٢
٥	٢١	١٢
٨	٢٣	٢٢
١٠	٣٠	١٦
١٥	٣٢	١٨
٩	٢٥	٢٣
٥٦١	١٨٢	١١٢

ثم أوجد ما يلي :

- ١ - اختبر الفرضية  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$  صفرًا .
- ٢ - مصفوفة التشتت للمعالم .
- ٣ - معامل التحديد .
- ٤ - اختبر معنوية كل معلم بمستوى ٩٥٪.

### الحل :

(٤٣)

$$\underline{\underline{\beta}} = (\underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{S}}_2)^{-1} \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{S}}_3$$

(٤٠)

$$\underline{\underline{S}}_3 = \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{\beta}}$$

بتطبيق المعادلة (٤٠) تصبح المصفوفات على النحو الآتي :

$$\begin{pmatrix} 9 & 23 & 1 \\ 12 & 28 & 1 \\ 12 & 21 & 1 \\ 22 & 23 & 1 \\ 16 & 30 & 1 \\ 18 & 32 & 1 \\ 23 & 25 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 23 & 1 \\ 12 & 28 & 1 \\ 12 & 21 & 1 \\ 22 & 23 & 1 \\ 16 & 30 & 1 \\ 18 & 32 & 1 \\ 23 & 25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 25 & 32 & 30 & 23 & 21 & 28 & 23 \\ 23 & 18 & 16 & 22 & 12 & 12 & 9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\text{سٲا سٲا}}}$$

$$\begin{bmatrix} 112 & 182 & 7 \\ 2932 & 4832 & 182 \\ 1962 & 2932 & 112 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 25 & 32 & 30 & 23 & 21 & 28 & 23 \\ 23 & 18 & 16 & 22 & 12 & 12 & 9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\text{سٲا صٲا}}}$$

$$\begin{bmatrix} 56 \\ 1531 \\ 972 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\text{سٲا صٲا}}}$$

$$1- \begin{bmatrix} 112 & 182 & 7 \\ 2932 & 4832 & 182 \\ 1962 & 2932 & 112 \end{bmatrix} = 1- (\underline{\underline{\text{سٲا سٲا}}})$$

$$\begin{bmatrix} 7560- & 28700- & 883760 \\ 140- & 1190 & 28700- \\ 700 & 140- & 7560- \end{bmatrix} \frac{1}{116200} =$$

(٤٣)

ب = (س - س<sup>١</sup>) س<sup>١</sup>

$$\begin{bmatrix} ٥٦ \\ ١٥٣١ \\ ٩٧٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٧٥٦٠- & ٢٨٧٠٠ & ٨٨٣٧٦٠ \\ ١٤٠- & ١١٩٠ & ٢٨٧٠٠- \\ ٧٠٠ & ١٤٠- & ٧٥٦٠- \end{bmatrix} \frac{١}{١١٦٢٠٠} = \text{ب. س.}$$

$$\begin{bmatrix} ١٥٤٦٩- \\ ٠,٦٧٦٥ \\ ٠,٣٦٧٥ \end{bmatrix} =$$

إذا معادلة الانحدار هي :

$$\text{س}_ر = -١٥,٤٦٩ + ٠,٦٧٦٥ \text{ س}_ا + ٠,٣٦٧٥ \text{ س}_٢$$

أما بقية التحليلات فتتم بناء على الخطوات التالية :

$$\frac{\text{ن}(\text{س} - \text{س}_ر)}{\text{ن}} = \text{ن} \text{ س}_ر$$

$$\frac{٥٦ \times ٥٦ \times ٧}{٤٩} =$$

$$٤٤٨ =$$

$$\begin{pmatrix} ٥٦ \\ ١٥٣١ \\ ٩٧٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠,٣٦٧٥ & ٠,٦٧٦٥ & ١٥,٤٦٩- \end{pmatrix} = \text{ب س س}$$

$$٥٢٦,٦٦٧٥ =$$

$$\begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ٥ \\ ٨ \\ ١٠ \\ ١٥ \\ ٩ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٩ & ١٥ & ١٠ & ٨ & ٠ & ٥ & ٦ & ٣ \end{pmatrix} = \text{س س س}$$



$$٥٤٠ =$$

$$\text{ص}^2_{\text{ر}} =$$

$$\text{ص}^2_{\text{ص}} - \text{ن} \text{ ص}^2 = ٤٤٨ - ٥٤٠$$

$$٩٢ =$$

$$\text{ب}^2_{\text{ب}} - \text{ن} \text{ ص}^2 = ٤٤٨ - ٥٢٦,٦٦٧٥$$

$$٧٨,٦٦٥ =$$

(١) وفيما يلي جدول تحليل التباين لاختبار الفرضية :

ف : ب = ١ ، ب = ٢ = صفراً

ف : هناك على الأقل ب ١ ، أوب ٢ ≠ صفراً

المصدر	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	ف <sub>١,٢</sub>
الانحدار	٧٨,٦٦٧٥	٢	٣٩,٣٣٤	١١,٨٠١
الخطأ (بالطرح)	١٣,٣٣٢٥	٤	٣,٣٣٣	
المجموع الكلي	٩٢	٦		

وبما أن إحصائية الاختبار (١١,٨٠١) أكبر من القيمة الحرجة (المجدولة) بمستوى معنوية ٩٥% ، فلا يمكن قبول فرضية العدم .

(٥٥)

$$\text{ر}^2_{\text{ك}} = \frac{٢٢٢}{٢٢٢}$$

$$= \frac{٧٨,٦٦٧٥}{٩٢}$$

$$= ٠,٨٥٥$$

(٣) باستخدام جدول تحليل التباين السابق يتضح أن القيمة التقديرية للتباين ع<sup>٢</sup> = ٣,٣٣٣ ومصفوفة التشتت هي :

$$ع^٢ (س٢ س) = \begin{bmatrix} ٧٥٦٠- & ٢٨٧٠٠- & ٨٨٣٧٦٠ \\ ١٤٠- & ١١٩٠ & ٢٨٧٠٠- \\ ٧٠٠ & ١٤٠- & ٧٥٦٠- \end{bmatrix} \frac{٣,٣٣٣}{١١٦٢٠٠} =$$

(٤) من مصفوفة التشتت السابقة :

$$٨٨٣٧٦٠ \times \frac{٣,٣٣٣}{١١٦٢٠٠} = ع١$$

$$= ٢٥,٣٤٩$$

$$ع١ = ٥,٠٣٥$$

$$٣,٣٣٣ \times \frac{١١٩٠}{١١٦٢٠٠} = ع٢$$

$$= ٠,٣٤$$

$$ع٢ = ٠,١٨$$

$$٣,٣٣٣ \times \frac{٧٠٠}{١١٦٢٠٠} = ع٣$$

$$= ٠,٠٢$$

$$ع٣ = ٠,١٤$$

إحصائية الاختبار هي :

$$\frac{١٥,٤٦٩-}{٥,٠٣٥} = \frac{١}{ع}$$

$$= ٣,٠٧-$$

$$\frac{٠,٦٧٦٥}{٠,١٨} = \frac{ب}{ع ب}$$

$$٣,٧٦ =$$

$$\frac{٠,٣٦٧٥}{٠,١٤} = \frac{ج}{ع ج}$$

$$٢,٦٣ =$$

وبما أن إحصائية الاختبار الخاصة بكل متغير أكبر من ٢ ، فلا يمكن قبول أى من الفرضيات التالية :

ف . : أ = صفراً  
أو :  
ف . : ب = صفراً  
أو :  
ف . : ج = صفراً

### تطبيق المصفوفات على النموذج المركزى :

يفضل الكثيرون استخدام النموذج المركزى ؛ لأن إيجاد مقلوب المصفوفة (س<sub>١</sub> س<sub>٢</sub>) يكون أسهل من سابقه فى حالة تنفيذه يدوياً . وتجدد الإشارة هنا إلى أن النموذج المركزى يكون على النحو الآتى :

$$\text{صر} = أ + ب (س١ - س٢) + ج (س٢ - س٣) + د (س٣ - س٤) + هـ (س٤ - س٥) + و (س٥ - س٦) + ز (س٦ - س٧) + ح (س٧ - س٨) + ط (س٨ - س٩) + ك (س٩ - س١٠) + ل (س١٠ - س١١) + م (س١١ - س١٢) + ن (س١٢ - س١٣) + س (س١٣ - س١٤) + ع (س١٤ - س١٥) + ف (س١٥ - س١٦) + ق (س١٦ - س١٧) + د (س١٧ - س١٨) + هـ (س١٨ - س١٩) + و (س١٩ - س٢٠) + ز (س٢٠ - س٢١) + ح (س٢١ - س٢٢) + ط (س٢٢ - س٢٣) + ك (س٢٣ - س٢٤) + ل (س٢٤ - س٢٥) + م (س٢٥ - س٢٦) + ن (س٢٦ - س٢٧) + س (س٢٧ - س٢٨) + ع (س٢٨ - س٢٩) + ف (س٢٩ - س٣٠) + ق (س٣٠ - س٣١) + د (س٣١ - س٣٢) + هـ (س٣٢ - س٣٣) + و (س٣٣ - س٣٤) + ز (س٣٤ - س٣٥) + ح (س٣٥ - س٣٦) + ط (س٣٦ - س٣٧) + ك (س٣٧ - س٣٨) + ل (س٣٨ - س٣٩) + م (س٣٩ - س٤٠) + ن (س٤٠ - س٤١) + س (س٤١ - س٤٢) + ع (س٤٢ - س٤٣) + ف (س٤٣ - س٤٤) + ق (س٤٤ - س٤٥) + د (س٤٥ - س٤٦) + هـ (س٤٦ - س٤٧) + و (س٤٧ - س٤٨) + ز (س٤٨ - س٤٩) + ح (س٤٩ - س٥٠) + ط (س٥٠ - س٥١) + ك (س٥١ - س٥٢) + ل (س٥٢ - س٥٣) + م (س٥٣ - س٥٤) + ن (س٥٤ - س٥٥) + س (س٥٥ - س٥٦) + ع (س٥٦ - س٥٧) + ف (س٥٧ - س٥٨) + ق (س٥٨ - س٥٩) + د (س٥٩ - س٦٠) + هـ (س٦٠ - س٦١) + و (س٦١ - س٦٢) + ز (س٦٢ - س٦٣) + ح (س٦٣ - س٦٤) + ط (س٦٤ - س٦٥) + ك (س٦٥ - س٦٦) + ل (س٦٦ - س٦٧) + م (س٦٧ - س٦٨) + ن (س٦٨ - س٦٩) + س (س٦٩ - س٧٠) + ع (س٧٠ - س٧١) + ف (س٧١ - س٧٢) + ق (س٧٢ - س٧٣) + د (س٧٣ - س٧٤) + هـ (س٧٤ - س٧٥) + و (س٧٥ - س٧٦) + ز (س٧٦ - س٧٧) + ح (س٧٧ - س٧٨) + ط (س٧٨ - س٧٩) + ك (س٧٩ - س٨٠) + ل (س٨٠ - س٨١) + م (س٨١ - س٨٢) + ن (س٨٢ - س٨٣) + س (س٨٣ - س٨٤) + ع (س٨٤ - س٨٥) + ف (س٨٥ - س٨٦) + ق (س٨٦ - س٨٧) + د (س٨٧ - س٨٨) + هـ (س٨٨ - س٨٩) + و (س٨٩ - س٩٠) + ز (س٩٠ - س٩١) + ح (س٩١ - س٩٢) + ط (س٩٢ - س٩٣) + ك (س٩٣ - س٩٤) + ل (س٩٤ - س٩٥) + م (س٩٥ - س٩٦) + ن (س٩٦ - س٩٧) + س (س٩٧ - س٩٨) + ع (س٩٨ - س٩٩) + ف (س٩٩ - س١٠٠)$$

حيث س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub> ، س<sub>٤</sub> ، س<sub>٥</sub> ، س<sub>٦</sub> ، س<sub>٧</sub> ، س<sub>٨</sub> ، س<sub>٩</sub> ، س<sub>١٠</sub> ، س<sub>١١</sub> ، س<sub>١٢</sub> ، س<sub>١٣</sub> ، س<sub>١٤</sub> ، س<sub>١٥</sub> ، س<sub>١٦</sub> ، س<sub>١٧</sub> ، س<sub>١٨</sub> ، س<sub>١٩</sub> ، س<sub>٢٠</sub> ، س<sub>٢١</sub> ، س<sub>٢٢</sub> ، س<sub>٢٣</sub> ، س<sub>٢٤</sub> ، س<sub>٢٥</sub> ، س<sub>٢٦</sub> ، س<sub>٢٧</sub> ، س<sub>٢٨</sub> ، س<sub>٢٩</sub> ، س<sub>٣٠</sub> ، س<sub>٣١</sub> ، س<sub>٣٢</sub> ، س<sub>٣٣</sub> ، س<sub>٣٤</sub> ، س<sub>٣٥</sub> ، س<sub>٣٦</sub> ، س<sub>٣٧</sub> ، س<sub>٣٨</sub> ، س<sub>٣٩</sub> ، س<sub>٤٠</sub> ، س<sub>٤١</sub> ، س<sub>٤٢</sub> ، س<sub>٤٣</sub> ، س<sub>٤٤</sub> ، س<sub>٤٥</sub> ، س<sub>٤٦</sub> ، س<sub>٤٧</sub> ، س<sub>٤٨</sub> ، س<sub>٤٩</sub> ، س<sub>٥٠</sub> ، س<sub>٥١</sub> ، س<sub>٥٢</sub> ، س<sub>٥٣</sub> ، س<sub>٥٤</sub> ، س<sub>٥٥</sub> ، س<sub>٥٦</sub> ، س<sub>٥٧</sub> ، س<sub>٥٨</sub> ، س<sub>٥٩</sub> ، س<sub>٦٠</sub> ، س<sub>٦١</sub> ، س<sub>٦٢</sub> ، س<sub>٦٣</sub> ، س<sub>٦٤</sub> ، س<sub>٦٥</sub> ، س<sub>٦٦</sub> ، س<sub>٦٧</sub> ، س<sub>٦٨</sub> ، س<sub>٦٩</sub> ، س<sub>٧٠</sub> ، س<sub>٧١</sub> ، س<sub>٧٢</sub> ، س<sub>٧٣</sub> ، س<sub>٧٤</sub> ، س<sub>٧٥</sub> ، س<sub>٧٦</sub> ، س<sub>٧٧</sub> ، س<sub>٧٨</sub> ، س<sub>٧٩</sub> ، س<sub>٨٠</sub> ، س<sub>٨١</sub> ، س<sub>٨٢</sub> ، س<sub>٨٣</sub> ، س<sub>٨٤</sub> ، س<sub>٨٥</sub> ، س<sub>٨٦</sub> ، س<sub>٨٧</sub> ، س<sub>٨٨</sub> ، س<sub>٨٩</sub> ، س<sub>٩٠</sub> ، س<sub>٩١</sub> ، س<sub>٩٢</sub> ، س<sub>٩٣</sub> ، س<sub>٩٤</sub> ، س<sub>٩٥</sub> ، س<sub>٩٦</sub> ، س<sub>٩٧</sub> ، س<sub>٩٨</sub> ، س<sub>٩٩</sub> ، س<sub>١٠٠</sub> هي انحرافات المتغيرات عن أوساطها.

### مثال (١١, ٢) :

استخدم بيانات المثال (٣) ، أو المثال (٦) ، لإيجاد معادلة الانحدار مستخدماً النموذج المركزي، والبيانات هي :

س٢	س١	س٣
٩	٢٣	٣
١٢	٢٨	٦
١٢	٢١	٥
٢٢	٢٣	٨
١٦	٣٠	١٠
١٨	٣٢	١٥
٢٣	٣٥	٩
١١٢	١٨٢	٥٦

الحل :

$$\frac{١٨٢}{٧} = \text{س١} =$$

$$٢٦ =$$

$$\frac{١١٢}{٧} = \text{س٢} =$$

$$١٦ =$$

وبالتالي فمصفوفة الانحرافات للنموذج المركزي هي :

$$\begin{pmatrix} ٧- & ٣- & ١ \\ ٤- & ٢ & ١ \\ ٤- & ٥- & ١ \\ ٦ & ٣- & ١ \\ ٠ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٦ & ١ \\ ٧ & ١- & ١ \end{pmatrix} = \text{س٣}$$

و بالتالى فإن :

$$1- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 20 & 100 & 0 \\ 170 & 20 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\text{سـ} \text{سـ}}} 1-$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{140-}{116200} & \frac{1190}{116200} & 0 \\ \frac{700}{116200} & \frac{140-}{116200} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{2-}{1660} & \frac{17}{1660} & 0 \\ \frac{10}{1660} & \frac{2-}{1660} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1- & 6 & 4 & 3- & 5- & 2 & 3- \\ 7 & 2 & 0 & 6 & 4- & 4- & 7- \end{bmatrix} = \underline{\underline{\text{سـ} \text{سـ}}}$$

$$\begin{bmatrix} 56 \\ 75 \\ 76 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 56 \\ 75 \\ 76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{2-}{1660} & \frac{17}{1660} & 0 \\ \frac{10}{1660} & \frac{2-}{1660} & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\text{ب}}} = \underline{\underline{\text{سـ} \text{سـ}}} 1- \underline{\underline{\text{سـ} \text{سـ}}}$$

$$\left[ \begin{array}{c} 8 \\ \frac{1123}{1660} \\ \frac{610}{1660} \end{array} \right] =$$

إذاً :

$$أ = 8 = ص$$

$$ب = \frac{1123}{1660}$$

$$ج = \frac{610}{1660}$$

$$\therefore \text{ص} = 8 + \frac{1123}{1660} (س - ٢٦) + \frac{610}{1660} (س - ١٦)$$

$$= 8 - \frac{1123}{1660} \times ٢٦ + \frac{610}{1660} \times ١٦ + \frac{1123}{1660} س - \frac{610}{1660} س$$

$$= -٤٦٩, ١٥ + ٦٧٦٥, ١٥ س - ٣٦٧٥ س$$

وهو نفس نموذج المثال (٣) ونموذج المثال (٦) .

أما بالنسبة لجدول تحليل التباين فهو يتكون من :

المجموع الكلي (م م ك) = ص - ن ص

$$= \text{ص} - \text{ن} \times \text{ص}$$

$$= ٥٤٠$$

$$\left( \begin{array}{c} ٥٦ \\ ٧٥ \\ ٧٦ \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 8 \\ \frac{1123}{1660} \\ \frac{610}{1660} \end{array} \right) = \text{ب} \times \text{ص}$$

$$= ٧٨, ٦٧ + ٤٤٨$$

$$= ٥٢٦, ٦٧$$

وهو نفس المقدار الوارد في المثال (٦) . إذا فجدول تحليل التباين يتم بنفس الأسلوب السابق ، كذلك يلاحظ من المصفوفة (س<sub>١</sub>) في المثال السابق والمثال رقم (٦) أن مصفوفة التشتت لم تتغير .

البرنامج التالي يقوم بإيجاد معادلة الانحدار الخطى البسيط وجدول تحليل التباين باستخدام المصفوفات . استخدمنا في هذا البرنامج التعليقات الخاصة بالمصفوفات مثل :

MAT READ  
TRN  
INV

وتعليقات الضرب والجمع وغيرها ، وكلها تحدثنا عنها في معرض حديثنا عن تعليقات لغة بيسك في الفصل الثاني .

هذا البرنامج يعالج مصفوفات بأبعاد مختلفة لاستخدامه لمصفوفة بأبعاد مختلفة عن تلك التي في البرنامج فينبغي فقط تعديل عبارات (DIM) وكذلك العبارة (720).

أما إذا كانت نسخة بيسك التي لديك لا تحتوى على تعليقات المصفوفات (MAT) ، فيمكنك استخدام البرنامجين اللذين بعده ، حيث يقوم أحدهما بإجراء العمليات الأساسية للمصفوفات ، والثاني يقوم بإيجاد معكوس المصفوفة (INV) والبرنامجان لا يستخدمان تعليمات المصفوفات .

```

10 REM برنامج لإيجاد معادلة الانحدار الخطى البسيط
15 REM وجدول تحليل التباين باستخدام المصفوفات
20 DIM X(7,2),Y(7,1),A(2,2),B(2,2),C(2,2),V(2,2),D(2,2),F(2,1),Z(7,1)
30 DIM P(1,1),T(1,1),H(1,1),R(1,1),L(1,1),G(1,1),M(1,1),J(3,2),W(1,1),N(3,1)
40 DIM O(1,1),I(1,1),K(1,1),U(1,1),S(1,1)
45 REM NO OF REGRESSION PARAMETERS
50 N=2
60 MAT READ X,Y
70 MAT READ J
80 MAT A=TRN(X) REM VALUES TO BE USED FOR FORECAST
90 MAT B=A**X REM TRANSPOSE OF MATRIX X
100 MAT C=A*Y REM GIVES N SUMS & SUMS OF SQUARES & CROSS-PRODUCTS
110 MAT D=C*Y REM USED FOR PARAMETERS AND VARIANCE COVARIANCE
120 MAT E=C*D REM GIVES SUMS AND CROSS-PRODUCTS WITH Y
130 MAT F=D**D REM COLUMN VECTOR OF PARAMETERS
140 MAT G=TRN(F)
150 MAT P=F - G
160 A1=(B(1,1)-1)**(-1)
170 N1=(N-1)**(-1)
180 MAT W=(N1)*P
220 MAT M=TRN(Y)
230 MAT T=M*Y
240 MAT U=INV(T)
250 K(1,1)=B(1,1) - N
265 MAT I=INV(K)
270 MAT H=T - P
280 MAT S=H*I

```

```

290 MAT O=INV(S)
300 MAT F=O*W
330 MAT R=P*U
340 E1=S(1,1)
350 MAT V=(E1)*C REM VARIANCE COVARIANCE MATRIX
360 S1=SQR(V(1,1)) REM STANDARD DEV. OF FIRST PARAMETER
370 S2=SQR(V(2,2)) REM STANDARD DEV. OF SECOND PARAMETER
380 T1=E(1,1)/S1 REM T VALUE OF FIRST PARAMETER
390 T2=E(2,1)/S2 REM T VALUE OF SECOND PARAMETER
400 MAT Z=X*E REM PREDICTED VALUES
410 MAT L=Z-Y REM RESIDUAL
420 MAT N=X*E REM FORECAST
490 PRINT 'E(1,1):' '=' 'تقدير المعلم ا'
500 PRINT 'E(2,1):' '=' 'تقدير المعلم ب'
520 PRINT 'R(1,1):' '=' 'معامل التحديد'
525 PRINT
530 PRINT USING 810
540 PRINT USING 820
550 PRINT USING 830
560 PRINT USING 840
570 PRINT USING 850
580 PRINT USING 860,F(1,1),W(1,1),N-1,F(1,1)
590 PRINT USING 870,S(1,1),K(1,1),H(1,1)
600 PRINT USING 880
610 PRINT USING 890,B(1,1)-1,T(1,1)
615 PRINT
618 PRINT
620 PRINT 'مصفوفة التشتت'
630 MAT PRINT V
635 PRINT
637 PRINT
640 PRINT 'S1: (ا) الانحراف المعياري للمعلم ا'
650 PRINT
660 PRINT 'S2: (ب) الانحراف المعياري للمعلم ب'
665 PRINT
666 PRINT
670 PRINT 'T1: (ا) قيمة ت للمعلم ا'
680 PRINT
690 PRINT 'T2: (ب) قيمة ت للمعلم ب'
700 PRINT
710 PRINT
715 PRINT USING 900
716 PRINT USING 920
717 PRINT USING 930
718 PRINT USING 950
720 FOR I=1 TO 7
730 PRINT USING 960,X(I,2),Y(I,1),Z(I,1),L(I,1)
735 PRINT
740 NEXT I
741 PRINT USING 970
742 PRINT USING 980
743 PRINT USING 990
744 PRINT USING 1000
750 FOR I=1 TO 3
760 PRINT USING 1010,J(I,2),N(I,1)
770 NEXT I

```

جدول تحليل التباين

المتباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	هـ ٥,١
الانحدار (ب)	#####	##	#####	#####
الخطأ	#####	##	#####	#####
المجموع الكلي	#####	##	#####	#####

جدول التقدير باستخدام المعادلة

خطا التقدير	التقدير	المتنبؤ	المعادلة
#####	#####	#####	#####
#####	#####	#####	#####
#####	#####	#####	#####

جدول التنبؤ باستخدام المعادلة

المتنبؤ	المتنبؤ
#####	#####
#####	#####
#####	#####

```

1020 DATA 1,10,1,15,1,14,1,16,1,11,1,20,1,19
1030 DATA 25,35,30,40,24,50,48
1040 DATA 1,17,1,18,1,25
9999 END

```



### المخرجات

$$\begin{aligned} -5.25 &= \text{تقدير المعلم } a \\ 2.749985 &= \text{تقدير المعلم } b \\ .9653304 &= \text{معامل التصحيح} \end{aligned}$$

### جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	ف, ١
الانحدار (ب)	635.1875	1	635.187	139.2192
الخطأ	22.8125	5	4.562	
المجموع الكلي	658.0000	6		

### مصفوفة التشتت

12.87273	- .8147299	
- .8147299	5.431531E-02	
3.587858	(ا) الانحراف المعياري للمعلم	
.2330564	(ب) الانحراف المعياري للمعلم	
-1.463268	قيمة ت للمعلم (ا)	
11.79965	قيمة ت للمعلم (ب)	

### جدول التقدير باستخدام المعادله

خطا التقدير	التقدير	Y	X
-2.7502	22.2498	25.00	10.00
0.9998	35.9998	35.00	15.00
3.2498	33.2498	30.00	14.00
-1.2502	38.7498	40.00	16.00
0.9998	24.9998	24.00	11.00
-0.2503	49.7497	50.00	20.00
-1.0003	46.9997	48.00	19.00

### جدول التنبؤ باستخدام المعادله

X	التنبؤ
17.00	41.50
18.00	44.25
25.00	63.50

### الشروط الواجب توفرها في معادلة الانحدار الخطي :

هناك عدة شروط يجب توفرها في البيانات والنموذج ، وبدونها لا يكون النموذج المستخرج عملياً في الوصف أو التقدير . ويتضح ذلك من فشل إحصائيات المعالم في اجتياز القيمة الحرجة ( حوالى اثنتين ) ، أو في ضعف معامل التحديد ، وهذه ظواهر كثيرة الحدوث أثناء التطبيقات العملية خاصة في المجال الاقتصادي والمجال الاجتماعي . أما أهم هذه الشروط فيمكن إيجازها فيما يلي :

- أ - اختيار النموذج المناسب ويتضمن ذلك :
  - ١ - أن تكون العلاقة بين المتغيرات خطية .
  - ٢ - ألا يكون هناك متغير ذو علاقة قد تم استبعاده ، أو متغير ليست له علاقة أضعف للنموذج . ومن المعروف أن زيادة عدد المتغيرات تزيد من قيمة معامل التحديد ؛ لأنها تضعف عدد درجات حرية الخطأ دون مبرر ، فيبدو معامل التحديد كبيراً مع ضعف في معالم النموذج .
- ب - عدم وجود أخطاء في القياس أثناء جمع البيانات .
- ج - عدم وجود ارتباط ذاتي (Autocorrelation) بين المتغيرات .
- د - يجب أن تكون الأخطاء موزعة توزيعاً طبيعياً ، كما يجب ألا يكون بينها ارتباط ، وألا تتأثر طردياً أو عكسياً بقيم المتغيرات (Homoskedasticity) ، كذلك يجب أن يساوى وسطهما الحسابي صفراً . وللتأكد من توفر هذا الشرط يتم تنفيذ رسم بياني للأخطاء على القيم التقديرية من النموذج .

يتضح من ذلك أنه من المتوقع في حالات كثيرة ألا تحقق إحصائيات الاختبار للمعالم القيم المطلوبة لتصبح ذات فاعلية . وبالنظر إلى المعادلة رقم (٢٨) أو المعادلة رقم (٢٩) يتضح أن تباين المعلم يتناسب تناسباً عكسياً مع تباين المتغير المستقل (س) ، فإذا كانت قيم المتغير متقاربة مع بعضها أصبح تباين المعلم كبيراً ، بيد أن إحصائية الاختبار لكل معلم تتناسب تناسباً عكسياً مع تباينه . لذا فربما يعزى الفشل في ضعف قيمة إحصائية الاختبار إلى تجانس القيم العينية للمتغير المستقل ، وهو أمر لا يمكن معالجته إلا بزيادة عدد المتغيرات ، وذلك بإضافة قيم عينية أخرى أكثر تطرفاً .

أما ارتكاب الخطأ من النوع الثانى أثناء اختبار فرضية العدم لمعامل النموذج ، أو عدم اختيار النموذج المناسب ، فربما يؤدي إلى نفس النتيجة ، أو ضعف معامل التحديد . وفى هذه الحالة لا بد من تحويل البيانات التى اعتمد عليها النموذج (TRANSFORMATION) .

كذلك قد يتسبب الارتباط الشديد بين المتغيرات المستقلة (Multicollinearity) فى إضعاف القيم الإحصائية للمعامل ، مع وجود قيمة عالية لمعامل التحديد ، فيصبح النموذج غير صالح للوصف ، وبمعالم ذات اتجاهات تخالف المنطق والواقع فى أكثر الحالات . وفى هذه الحالة لا يمكن الاعتماد على النموذج ، إلا إذا أضعف ذلك الارتباط الشديد . وهناك طرق عديدة لإضعافه ، أهمها زيادة حجم العينة ، أو إلغاء المتغير الأكثر ارتباطاً (أو دمجها في متغير آخر) بالمتغيرات الأخرى ويمكن الكشف عن ذلك المتغير بإعداد نماذج خطية للمتغيرات المستقلة بعضها عن بعض ، وتحديد النموذج الذى يتميز بأعلى معامل للتحديد .

فيما يلي برنامج لإجراء العمليات الأولية على المصفوفات بدون استخدام تعليمات المصفوفات (MAT).

```

10 REM      العمليات الحسابية الأولية للمصفوفات
20 REM      MAT      المصفوفات المعطاة
25 DIM X(7,3),Y(7,1),T(3,7),E(3,3),H(3,1)
30 REM DIM X(R,2),Y(Z,Q),T(Z,R),E(Z,Z),H(Z,Q)
35 REM X IS THE MATRIX OF INDEP.
40 REM Y IS THE MATRIX OF DEP.
50 REM T IS THE TRANSPOSE OF X.
60 REM E IS THE MATRIX T*X.
70 REM H IS THE MATRIX T*Y.
80 REM TRANSPOSITION PROC. NEXT
90 READ R,Z,Q
100 FOR I=1 TO R
110   FOR J=1 TO Z
120     READ X(I,J)
130   NEXT J
140 NEXT I
150 FOR I=1 TO R
160   FOR J=1 TO Q
170     READ Y(I,J)
180   NEXT J
185 NEXT I
190 FOR I=1 TO Z
200   FOR J=1 TO R
210     T(I,J) = X(J,I)
220   NEXT J
230 NEXT I
235 FOR K=1 TO Z
240   FOR J=1 TO Z
250     E(K,J) = 0
260     FOR I=1 TO R
270       E(K,J) = E(K,J) + T(K,I) * X(I,J)
280     NEXT I
290 NEXT J

```



البرنامج التالى يقوم بإيجاد مقلوب مصفوفة ذات أبعاد 5x5 . لاستخدام البرنامج لمصفوفة ذات أبعاد مختلفة يلزمك فقط التعديلات التالية :

- عبارات (DIM) فى السطر (20) .
- القيمة فى عبارة (DATA) فى السطر (40) حيث توضع بعد المصفوفة الجديدة .

يقوم البرنامج كذلك باختيار ما إذا كانت المصفوفة وحيدة (SINGULAR) وفى هذه الحالة فإنه يعطى رسالة بذلك .

```

10 REM      MAT استخدام تعليمات
20 DIM X(5,5), E(5,10), R(5,5)
30 READ R      REM NO. OF ROWS
40 DATA 5
50 C=2*R      REM NO. OF COLUMNS
60 FOR I=1 TO R
70   FOR J=1 TO C/2
80     READ X(I,J)
90   NEXT J
100  NEXT I
110  FOR I=1 TO R
120   FOR J=1 TO C/2
130     E(I,J)=X(I,J)
140   NEXT J
150  NEXT I
160  FOR I=1 TO R
170   FOR J=R+1 TO C
180     E(I,J)=0
190   IF J<>I+R THEN 220
200   E(I,J)=-1
210  NEXT J
220  NEXT I
230  FOR M=1 TO R
240   FOR K=1 TO R
250    FOR J=1+M TO C
260     IF K=M THEN 410
270     IF M>1 THEN 362
280     F=1
290     GO TO 363
300     F=E(M-1,M-1)
310     FOR T=1 TO R
320      IF E(T,T)< > 0 THEN 405
330      FOR I=T+1 TO R
340       IF E(I,T)< > 0 THEN 390
350     NEXT I
360     PRINT ' A ZERO PIVOT.  HENCE, SINGULAR MATRIX'
370     GO TO 999
380     FOR L=1 TO C
390      B=E(I,L)
400      E(I,L)=E(T,L)
410      E(T,L)=B
420     NEXT L
430     NEXT T
440     E(K,J)=(E(M,M)*E(K,J)-E(M,J)*E(K,M))/F
450     NEXT J
460     NEXT K
470   FOR K=1 TO R
480    FOR J=1+M TO C
490     IF K<>M THEN 427
500     E(M,J)=-E(M,J)
510   NEXT J
520 NEXT K
530 NEXT M

```

```

432 IF E(R,R) <> 0 THEN 440
434 PRINT 'SINGULAR MATRIX'
435 GO TO 999
440 FOR K=1 TO R
450 FOR J=R+1 TO C
460 E(K,J)=E(K,J)/E(R,R)
470 H(K,J-R)=E(K,J)
490 NEXT J
500 NEXT K
505 PRINT 'مقلوب المصفوفة'
507 PRINT '
510 FOR I=1 TO R
520 FOR J=1 TO C/2
530 PRINT H(I,J),
540 NEXT J
550 PRINT
560 NEXT I
570 PRINT
580 PRINT 'DET ='E(R,R)
590 PRINT 'NOTE: SIGN OF THE DET. MIGHT BE CHANGED IN CASE'
600 PRINT 'OF CHANGING TWO ADJACENT ROWS'
650 DATA 5,0,0,0,0,0,10,0,0,0,0,0,2,-3,4,0,0,7,-1,3,0,0,-1,2,-2
999 END

```

المخرجات

مقلوب المصفوفة

0.2	0	0	0	0
0	0.1	-0.3636363	0.1818181	-0.4545454
0	0	1.181818	-9.090906E-02	1.727272

DET = 550  
 NOTE: SIGN OF THE DET. MIGHT BE CHANGED IN CASE  
 OF CHANGING TWO ADJACENT ROWS

## تمارين

١ - إذا كانت :

$$\begin{aligned} \bar{X}_R = 37, \quad \bar{X}_R^2 = 160, \quad \bar{X}_R \text{ ص } \bar{X}_R = 625, \quad \bar{X}_R \text{ ص } \bar{X}_R = 156 \\ \bar{X}_R^2 = 2545, \quad \bar{X}_R = 10 \end{aligned}$$

فأوجد معادلة الانحدار الخطي للمتغير  $\bar{X}_R$  على المتغير  $\bar{X}_R$ .

٢ - تأكد من أن خط الانحدار في المعادلة الخاصة بالسؤال السابق يمر بنقطة الوسطين ، ثم قدر قيمة  $\bar{X}_R$  إذا كانت  $\bar{X}_R = 10, 9, 12, 7$

٣ - أوجد معامل التحديد لمعادلة السؤال الأول .

٤ - أوجد انحراف كل معلم من معالم الانحدار في السؤال الأول ، ثم قدر فترات الثقة للقيمة التقديرية للمتغير التابع بمستوى معنوية ٥٪ إذا كانت :

$$\bar{X}_R = 10, 9, 12, 7$$

٥ - البيانات التالية تمثل عينة من محطات البنزين وعدد الطلبات لصب البنزين في كل محطة وكانت البيانات كالآتي :

رقم المحطة	عدد الطلبات	كمية البنزين في يوم واحد بآلاف اللترات التي تم بيعها
١	٣	٢,٧
٢	٦	٤
٣	١	٠,٣
٤	١١	١٢
٥	٧	٣
٦	٨	٦

أوجد معادلة انحدار المبيعات على عدد الطلبات ، واختبر دقتها ، ثم قدر الكمية المباعة في محطة بنزين بها ١٠ طلبات ، ومحطة بها ٩ طلبات ، ومحطة ثالثة بها ٥ طلبات .

٦ - أوجد حدود الثقة بمستوى معنوية ٥٪ للقيم التقديرية في السؤال السابق ، وارسم ذلك بيانياً .

٧ - البيانات التالية تمثل عدد العاملين بإحدى المؤسسات خلال عشر سنوات . أوجد معادلة الانحدار الخطي وقدر عدد العاملين في عام ١٤١١ هـ ، والبيانات هي :

السنة	١٣٩٦	١٣٩٧	١٣٩٨	١٣٩٩	١٤٠٠	١٤٠١	١٤٠٢	١٤٠٣	١٤٠٤
عدد العاملين	٥٠	٦٠	٦٥	٧٥	٨٠	٩٠	١٠١	١٠٩	١١٩

٨ - إذا كانت :

ص<sub>ر</sub> = ٩٢،٤ - ٣س<sub>ر</sub>  
 فأوجد الارتباط بين المتغيرين إذا كان معامل التحديد ٩٠٪ ، والانحراف المعياري للمتغير ص يساوي ٢٥ ، والوسط الحسابي للمتغير س يساوي ١٠ .  
 كذلك أوجد الانحراف المعياري للمتغير س ، والوسط الحسابي للمتغير ص .

٩ - إذا كانت :

س<sub>ر</sub> = ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١  
 ص<sub>ر</sub> = ١٠ ، ٦ ، ١٠ ، ٦ ، ١٠ ، ٦ ، ١٠ ، ٦  
 فأوجد معادلة انحدار ص على س واختبر دقة المعادلة .

١٠ - البيانات التالية تمثل تكلفة الصيانة بآلاف الريالات سنوياً ، والعمر لعدد من الناقلات ، والبيانات هي :

التكلفة	٧	٤	٤	٩	١	٨
العمر بالسنوات	٣	٥	٤	٧	٢	٦

أوجد معادلة انحدار التكلفة على العمر ، وأوجد معامل التحديد والانحراف المعياري لكل معلم ، واختبر مقدرة على الوصف والتنبؤ . كذلك قدر تكلفة الصيانة لشاحنة عمرها ٨ سنوات ، وشاحنة أخرى عمرها عام واحد ، وشاحنة جديدة .



١١ - إذا كانت :

س = ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩

ص = ١٠ ، ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٢ ، ٠ ، ٢- ، ٤- ، ٦- ، ٨- ، ١٠-

فأوجد انحدار س على ص ، وأوجد معامل التحديد ، واختبر معنوية المعامل بمستوى ٥٪.

١٢ - إذا كانت :

س = ١٨ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٢٦ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٦ ، ٣٨

ص = ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢٠

فأوجد انحدار س على ص ، وأوجد معامل التحديد ، واختبر معنوية المعامل ، وقارن النموذج بنموذج السؤال السابق .

١٣ - استخدم بيانات السؤال الحادى عشر والسؤال الثانى عشر لاستخراج انحدار ص على س فى كل حالة ، وقارن بين كل حالتين .

١٤ - البيانات التالية تمثل عدد سكان إحدى المدن بالآلاف خلال الفترة من ١٣٩٨ هـ حتى ١٤٠٦ هـ :

السنة	١٣٩٨	١٣٩٩	١٤٠٠	١٤٠١	١٤٠٢	١٤٠٣	١٤٠٤	١٤٠٥	١٤٠٦
عدد السكان بالآلاف	٣١	٣٤	٣٧	٤٣	٤٤	٤٩	٧١	٩٨	١٠٧

أوجد معادلة الانحدار الخطى لتقدير عدد السكان وأوجد معامل التحديد ، واختبر معنوية المعامل بمستوى معنوية ٥٪ ، وقدر عدد السكان في عام ١٤١٠ هـ .

١٥ - استخدم بيانات السؤال السابق وأوجد معادلة الانحدار للوغريتمات البيانات بدلاً عن البيانات نفسها ، واختبر دقة المعادلة ومعنوية المعامل بمستوى معنوية ٥٪ ، وقدر عدد السكان في عام ١٤١٠ هـ ، وقارن بين النموذج الحالى ونموذج السؤال السابق .

١٦ - اذا كانت :

ص ر	س ١ ر	س ٢ ر
٣٠	٤٤	١٥
٢٨	٤٦	١٤
٢٨	٤٤	١٤
٢٨	٤٥	١٥
٢٩	٤٦	١٦
٢٤	٤١	١٤
٢٧	٤٣	١٣
٢٦	٤٣	١٢
٢٧	٤٤	١٤
٢٥	٤٥	١١

فأوجد معادلة انحدار ص على المتغيرين س ١ و س ٢ ، واختبر دقة المعادلة ومعنوية المعالم وقدر قيمة ص ر إذا كانت س ١ = ٤٧ ، س ٢ = ١٦ .

١٧ - البيانات التالية تمثل عينة من ٨ عجول وأعمارها وأوزانها عند بداية تناول عشب خاص لزيادة الوزن ، ومن ثم زيادة الوزن في كل حالة .  
أوجد معادلة انحدار زيادة الوزن على العمر والوزن الأصلي ثم اختبر دقة المعادلة ومعنوية المعالم بمستوى معنوية ٥٪ ، والبيانات هي :

العمر بالشهور	الوزن بالكيلوجرام	زيادة الوزن بالكيلوجرام
٥	٣٤	٨
١١	٢٥	٧
٤	٥٥	٨
٩	٤١	١١
٧	٥٤	١٠
٨	٥٠	٥
١٢	٤٨	٤
١٠	٦٣	٥

١٨ - البيانات التالية تمثل متوسط تكلفة الصيانة بالريالات شهرياً، وعدد الساعات الأسبوعية التي تعملها كل ماكينة، وعمر الماكينة بالشهور، وعدد المرات التي تتعرض فيها للصيانة شهرياً.

أوجد معادلة انحدار تكلفة الصيانة على المتغيرات الأخرى، وأوجد الارتباط بين كل متغيرين، واختبر دقة المعادلة ومعنوية المعالم بمستوى ٥٪ . والبيانات هي :

تكلفة الصيانة	عدد الساعات	العمر	عدد مرات الصيانة
٦٤٠	٩٠	٨٠	٤٠
٦١٠	٧٥	٥٠	١٠
٤٩٠	٤٥	٣٠	٢٠
٢٥٠	٤٥	٥	٥٠
٤٠٠	٤٥	١٥	٣٠
٧٩٠	٦٠	٧٠	١٠
٨٤٠	٩٠	٧٠	١٠
١٢٠	٤٥	١٥	٤٠
٣٦٠	٤٥	٣٠	٣٠
٥٠٠	٤٥	٧٥	١٠
٦١٠	١٢٠	٥٠	١٠
٤٩٠	٩٠	٦٠	٢٠
٢٥٠	٦٠	١٠	٥٠
٦١٠	١٢٠	٣٥	٤٠
٣١٠	١٢٠	١٥	٤٠
٢٠٠	٦٠	٥	٥٠
٢٢٠	٧٥	٢٠	٥٠
٣٢٠	٩٠	٤٠	٤٠

١٩ - البيانات التالية تمثل بالشهور المدة التي عملها كل موظف بإحدى المؤسسات ذات القسمين الرجال والنسوى قبل أن ينتقل الموظف إلى جهة عمل أخرى . وتمثل نفس البيانات عمر كل موظف عند التحاقه بالعمل ، والدرجات التي حصل عليها في مسابقة الالتحاق بالوظيفة ( كنسبة مئوية ) . هذا ويمثل الصفر المرأة والواحد الرجل .

والمطلوب هو تقدير معادلة الانتظام في الوظيفة على المتغيرات الأخرى مع اختبار دقتها للتنبؤ والوصف .

المدة بالشهور	العمر	الجنس	درجات المسابقة	ملحوظة
٤٠	٢٠	٠	٧٠	
١٠	٢٠	٠	١٠	
٢٠	٣٠	١	٧٠	
٩٠	٣٠	١	٢٠	
١٠	٢٠	١	٢٠	
٩٠	٤٠	١	٤٠	
صفر	٢٠	٠	١٠٠	انسحب بعد أقل من شهر
١٠	٥٠	٠	٦٠	
٨٠	٢٠	١	٧٠	
١٠	٢٠	١	٨٠	
٢٠	٤٠	١	٥٠	
١٠	٤٠	١	٦٠	
٣٠	٣٠	١	٤٠	
٣٠	٥٠	١	٧٠	
٣٠	٢٠	١	٦٠	
١٢٠	٣٠	٠	٩	
٤٣٠	٢٠	٠	١٠٠	
٢٠	٣٠	١	٢٠	
١٠٠	٣٠	٠	٥٠	
٤٨٠	٢٠	١	٩٠	

٢٠ - إذا كانت :

ص = ١٠ ٣ ٥٠ ٦٠ ٨٠ ١٠٠

س ١ = ٣ ٨ ١٠ ١١ ١٥ ١٩

س ٢ = ٧ ١٧ ٢١ ٢٣ ٣١ ٣٩

فأوجد معادلة انحدار ص على س ١ و س ٢ ، واختبر قدرتها على التنبؤ والوصف .  
ما هي التعديلات التي يجب أن تطرأ على المعادلة لتحسين مقدرتها على الوصف ؟

٢١ - اكتب برنامج بيسك لإيجاد معادلة الانحدار الخطي للبيانات بالسؤال (١) ، ومن ثم معامل التحديد .

- ٢٢ - اكتب برنامج بيسك لإيجاد معادلة الانحدار الخطى للبيانات بالسؤال (٥) .
- ٢٣ - مستخدماً البيانات بالسؤال (٧) اكتب برنامج بيسك لإيجاد معادلة الانحدار الخطى .
- ٢٤ - استخدم البيانات بالسؤال (١٠) فى برنامج بيسك لإيجاد معادلة الانحدار ومعامل التحديد والانحراف المعيارى .
- ٢٥ - استخدم البيانات فى السؤال (١١) فى برنامج وأوجد معامل التحديد .



## الملاحق

التوزيع الطبيعي	■ جدول (١)
توزيع ت	■ جدول (٢)
توزيع مربع كاي	■ جدول (٣)
توزيع ف	■ جدول (٤)
التوزيع ذو الحدين	■ جدول (٥)
اختبار حسن المطابقة لعينتين صغيرتين متساويتين	■ جدول (٦)
اختبار حسن المطابقة لعينتين كبيرتين	■ جدول (٧)
اختبار فروق الرتب للزوج المتقارنة	■ جدول (٨)
اختبار مجموع الرتب لعينتين	■ جدول (٩)
قيم $r$ الحرجة لاختبار $z = \text{صفر}$	■ جدول (١٠)
تحويل $r$ إلى $s$	■ جدول (١١)
دوال لغة بيسك في جهاز (IBM)	■ جدول (١٢)





**جدول (١)**  
**التوزيع الطبيعي (١)**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.	.0013									
-2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0227	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1921	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2326	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

المصدر :

LARSON (H.J.) , Introd . To Prob -Theory and Statistical Inference;  
wiley 1976, page 398.

تابع جدول (١)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9978	.9979	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.	.9987									

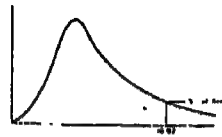
## جدول (٢)

توزيع ت

د	درجات الحرية = د						
	.60	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	636.619
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	12.941
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	6.859
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	5.405
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	4.587
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	3.819
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	3.792
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	3.767
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	3.745
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	3.725
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	3.707
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	3.690
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	3.674
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	3.659
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	3.645
40	.255	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	3.551
60	.254	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	3.461
120	.254	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	3.373
∞	.253	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	3.291

المصدر: نفس المصدر السابق صفحة (٤٠٢)

جدول (٣)  
التوزيع مربع كاي (ك<sup>٢</sup>)



درجات الحرية	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.004393	0.00457	0.00482	0.00503	0.00538	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.89	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.85	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.58	21.03	23.31	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.15	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.63	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.92	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.31	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.25	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.28	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.03	51.80	56.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.89	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.93
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.3	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.0	135.8	140.2
∞	-2.58	-2.33	-1.96	-1.64	-1.28	+1.28	+1.64	+1.96	+2.33	+2.58

المصدر

Patchet (I.S.); Statistical Methods; Van Nostrand; New York; 1982 page 356.

درجات حرية المقام

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	21	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.58	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.78	8.75	8.71	8.68	8.65	8.61	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.99	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.72	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.81	3.77	3.71	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.61	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.31	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.05	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.11	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.95	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.83	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.55	2.51	2.47	2.43	2.39	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.31	2.27	2.22	2.18
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.51	3.65	3.25	3.02	2.90	2.79	2.71	2.61	2.55	2.51	2.43	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.21	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.21	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.24	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.94	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.51	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.01	1.99	1.95	1.90	1.81
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.46	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.31	2.23	2.20	2.13	2.05	2.01	1.98	1.91	1.86	1.81	1.76
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.12	2.03	1.98	1.93	1.89	1.84	1.79	1.73
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.21	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.87	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.09	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.81	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.01	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.51	1.45	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.84	1.75	1.64	1.61	1.55	1.50	1.43	1.37	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.01

جدول (4) توزيع  
سوى المنوية %  
درجات حرية البسط

Patchet (L.S.): Statistical Methods, Van Nostrand, New York, 1982, page 360

المصدر:



جدول (٥)  
التوزيع ذو الحدين

ن	[r]	$p$				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
2	0	.8100	.6400	.4900	.3600	.2500
	1	.9900	.9600	.9100	.8400	.7500
3	0	.7290	.5120	.3430	.2160	.1250
	1	.9720	.8960	.7840	.6480	.5000
	2	.9990	.9920	.9730	.9360	.8750
4	0	.6561	.4096	.2401	.1296	.0625
	1	.9477	.8192	.6517	.4752	.3125
	2	.9963	.9728	.9163	.8208	.6875
	3	.9999	.9984	.9919	.9744	.9375
5	0	.5905	.3277	.1681	.0778	.0312
	1	.9185	.7373	.5282	.3370	.1875
	2	.9914	.9421	.8369	.6826	.5000
	3	.9995	.9933	.9692	.9130	.8125
	4	1.0000	.9997	.9976	.9898	.9688
6	0	.5314	.2621	.1176	.0467	.0156
	1	.8857	.6554	.4202	.2333	.1094
	2	.9842	.9011	.7443	.5443	.3438
	3	.9987	.9830	.9295	.8208	.6562
	4	.9999	.9984	.9891	.9590	.8906
	5	1.0000	.9999	.9993	.9959	.9844
7	0	.4783	.2097	.0824	.0280	.0078
	1	.8503	.5767	.3294	.1586	.0625
	2	.9743	.8520	.6471	.4199	.2266
	3	.9973	.9667	.8740	.7102	.5000
	4	.9998	.9953	.9712	.9037	.7734
	5	1.0000	.9996	.9962	.9812	.9375
	6	1.0000	1.0000	.9998	.9984	.9922

المصدر : نفس المصدر للتوزيع الطبيعي صفحة (٣٩١).

تابع جدول (هـ)

ن	[r]	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
8	0	.4305	.1678	.0576	.0168	.0039
	1	.8131	.5033	.2553	.1064	.0352
	2	.9619	.7969	.5518	.3154	.1445
	3	.9950	.9437	.8059	.5941	.3633
	4	.9996	.9896	.9420	.8263	.6367
	5	1.0000	.9988	.9887	.9502	.8555
	6	1.0000	.9999	.9987	.9915	.9648
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9961
	8					
	9					
	0	.3874	.1342	.0404	.0101	.0020
	1	.7748	.4362	.1960	.0705	.0195
	2	.9470	.7382	.4628	.2318	.0898
	3	.9917	.9144	.7297	.4826	.2539
	4	.9991	.9804	.9012	.7334	.5000
9	5	.9999	.9969	.9747	.9006	.7461
	6	1.0000	.9997	.9957	.9750	.9102
	7	1.0000	1.0000	.9996	.9962	.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9980
	9					
	0	.3487	.1074	.0282	.0060	.0010
	1	.7361	.3758	.1493	.0464	.0107
	2	.9298	.6778	.3828	.1673	.0547
	3	.9872	.8791	.6496	.3823	.1719
	4	.9984	.9672	.8497	.6331	.3770
	5	.9999	.9936	.9527	.8338	.6230
	6	1.0000	.9991	.9894	.9452	.8281
	7	1.0000	.9999	.9984	.9877	.9453
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9983	.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9990
10	0	.3138	.0859	.0198	.0036	.0005
	1	.6974	.3221	.1130	.0302	.0059
	2	.9104	.6174	.3127	.1189	.0327
	3	.9815	.8389	.5696	.2963	.1133
	4	.9972	.9496	.7897	.5328	.2744
	5	.9997	.9883	.9218	.7535	.5000
	6	1.0000	.9980	.9784	.9006	.7256
	7	1.0000	.9998	.9957	.9707	.8867
	8	1.0000	1.0000	.9994	.9941	.9673
	9					
	0					
	1					
	2					
	3					
	4					
	5					
	6					
	7					
	8					
	9					
11	0	.3138	.0859	.0198	.0036	.0005
	1	.6974	.3221	.1130	.0302	.0059
	2	.9104	.6174	.3127	.1189	.0327
	3	.9815	.8389	.5696	.2963	.1133
	4	.9972	.9496	.7897	.5328	.2744
	5	.9997	.9883	.9218	.7535	.5000
	6	1.0000	.9980	.9784	.9006	.7256
	7	1.0000	.9998	.9957	.9707	.8867
	8	1.0000	1.0000	.9994	.9941	.9673
	9					
	0					
	1					
	2					
	3					
	4					
	5					
	6					
	7					
	8					
	9					



تابع جدول (هـ)

ن	[r]	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
12	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9993	.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995
	0	.2824	.0687	.0138	.0022	.0002
	1	.6590	.2749	.0850	.0196	.0032
	2	.8891	.5583	.2528	.0834	.0193
	3	.9744	.7946	.4925	.2253	.0730
	4	.9957	.9274	.7237	.4382	.1938
	5	.9995	.9806	.8822	.6652	.3872
	6	.9999	.9961	.9614	.8418	.6128
	7	1.0000	.9994	.9905	.9427	.8062
13	8	1.0000	.9999	.9983	.9847	.9270
	9	1.0000	1.0000	.9998	.9972	.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
	0	.2542	.0550	.0097	.0013	.0001
	1	.6213	.2336	.0637	.0126	.0017
	2	.8661	.5017	.2025	.0579	.0112
	3	.9658	.7473	.4206	.1686	.0461
	4	.9935	.9009	.6543	.3530	.1334
	5	.9991	.9700	.8346	.5744	.2905
14	6	.9999	.9930	.9376	.7712	.5000
	7	1.0000	.9988	.9818	.9023	.7095
	8	1.0000	.9998	.9960	.9679	.8666
	9	1.0000	1.0000	.9993	.9922	.9539
	10	1.0000	1.0000	.9999	.9987	.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	0	.2288	.0440	.0068	.0008	.0001
	1	.5846	.1979	.0475	.0081	.0009
	2	.8416	.4481	.1608	.0398	.0065
15	3	.9559	.6982	.3552	.1243	.0287
	4	.9908	.8702	.5842	.2793	.0898
	5	.9985	.9561	.7805	.4859	.2120
	6	.9998	.9884	.9067	.6925	.3953
	7	1.0000	.9976	.9685	.8499	.6047
	8	1.0000	.9996	.9917	.9417	.7880
	9	1.0000	1.0000	.9983	.9825	.9102

تابع جدول (٥)

ن	[i]	$P$				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
15	10	1.0000	1.0000	.9998	.9961	.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	0	.2059	.0352	.0047	.0005	.0000
	1	.5490	.1671	.0353	.0052	.0005
	2	.8159	.3980	.1268	.0271	.0037
	3	.9444	.6482	.2969	.0905	.0176
	4	.9873	.8358	.5155	.2173	.0592
	5	.9978	.9389	.7216	.4032	.1509
	6	.9997	.9819	.8689	.6098	.3036
	7	1.0000	.9958	.9500	.7869	.5000
	8	1.0000	.9992	.9848	.9050	.6964
	9	1.0000	.9999	.9963	.9662	.8491
	10	1.0000	1.0000	.9993	.9907	.9408
16	11	1.0000	1.0000	.9999	.9981	.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0	.1853	.0281	.0033	.0003	.0000
	1	.5147	.1407	.0261	.0033	.0003
	2	.7892	.3518	.0994	.0183	.0021
	3	.9316	.5981	.2459	.0651	.0106
	4	.9830	.7982	.4499	.1666	.0384
	5	.9967	.9183	.6598	.3288	.1051
	6	.9995	.9733	.8247	.5272	.2272
	7	.9999	.9930	.9256	.7161	.4018
	8	1.0000	.9985	.9743	.8577	.5982
	9	1.0000	.9998	.9929	.9417	.7728
	10	1.0000	1.0000	.9984	.9809	.8949
	11	1.0000	1.0000	.9997	.9951	.9616
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9991	.9894
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9979
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

تابع جدول (٥)

ن	[r]	P				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
17	0	.1668	.0225	.0023	.0002	.0000
	1	.4818	.1182	.0193	.0021	.0001
	2	.7618	.3096	.0774	.0123	.0012
	3	.9174	.5489	.2019	.0464	.0064
	4	.9779	.7582	.3887	.1260	.0245
	5	.9953	.8943	.5968	.2639	.0717
	6	.9992	.9623	.7752	.4478	.1662
	7	.9999	.9891	.8954	.6405	.3145
	8	1.0000	.9974	.9597	.8011	.5000
	9	1.0000	.9995	.9873	.9081	.6855
	10	1.0000	.9999	.9968	.9652	.8338
	11	1.0000	1.0000	.9993	.9894	.9283
	12	1.0000	1.0000	.9999	.9975	.9755
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9936
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9988
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	.1501	.0180	.0016	.0001	.0000
	1	.4503	.0991	.0142	.0013	.0001
	2	.7338	.2713	.0600	.0082	.0007
	3	.9018	.5010	.1646	.0328	.0038
	4	.9718	.7164	.3327	.0942	.0154
	5	.9936	.8671	.5344	.2088	.0481
	6	.9988	.9487	.7217	.3743	.1189
	7	.9998	.9837	.8593	.5634	.2403
	8	1.0000	.9957	.9404	.7368	.4073
	9	1.0000	.9991	.9790	.8653	.5927
	10	1.0000	.9998	.9939	.9424	.7597
	11	1.0000	1.0000	.9986	.9797	.8811
	12	1.0000	1.0000	.9997	.9942	.9519
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9987	.9846
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9962
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9993
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

تابع جدول (٥) -

n	[r]	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
19	0	.1351	.0144	.0011	.0001	.0000
	1	.4203	.0829	.0104	.0008	.0000
	2	.7054	.2369	.0462	.0055	.0004
	3	.8850	.4551	.1332	.0230	.0022
	4	.9648	.6733	.2822	.0696	.0096
	5	.9914	.8369	.4739	.1629	.0318
	6	.9983	.9324	.6655	.3081	.0835
	7	.9997	.9767	.8180	.4878	.1796
	8	1.0000	.9933	.9161	.6675	.3238
	9	1.0000	.9984	.9674	.8139	.5000
	10	1.0000	.9997	.9895	.9115	.6762
	11	1.0000	1.0000	.9972	.9648	.8204
	12	1.0000	1.0000	.9994	.9884	.9165
	13	1.0000	1.0000	.9999	.9969	.9682
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9904
	15	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9978
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9996
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	.1216	.0115	.0008	.0000	.0000
	1	.3917	.0692	.0076	.0005	.0000
	2	.6769	.2061	.0355	.0036	.0002
	3	.8670	.4114	.1071	.0160	.0013
	4	.9568	.6296	.2375	.0510	.0059
	5	.9887	.8042	.4164	.1256	.0207
	6	.9976	.9133	.6080	.2500	.0577
	7	.9996	.9679	.7723	.4159	.1316
	8	.9999	.9900	.8867	.5956	.2517
	9	1.0000	.9974	.9520	.7553	.4119
	10	1.0000	.9994	.9829	.8725	.5881
	11	1.0000	.9999	.9949	.9435	.7483
	12	1.0000	1.0000	.9987	.9790	.8684
	13	1.0000	1.0000	.9997	.9935	.9423
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9984	.9793
	15	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9941
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9987
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

**جدول (٦)**

القيم الحرجة لاختبار عيتين  
صغيرتين متساويتين (حسن المطابقة)

**CRITICAL VALUES OF K IN  
THE KOLMOGOROV-SMIRNOV  
TWO-SAMPLE TEST (small samples)**

N	One-tailed test*		Two-tailed test†	
	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$
3	3	—	—	—
4	4	—	4	—
5	4	5	5	5
6	5	6	5	6
7	5	6	6	6
8	5	6	6	7
9	6	7	6	7
10	6	7	7	8
11	6	8	7	8
12	6	8	7	8
13	7	8	7	9
14	7	8	8	9
15	7	9	8	9
16	7	9	8	10
17	8	9	8	10
18	8	10	9	10
19	8	10	9	10
20	8	10	9	11
21	8	10	9	11
22	9	11	9	11
23	9	11	10	11
24	9	11	10	12
25	9	11	10	12
26	9	11	10	12
27	9	12	10	12
28	10	12	11	13
29	10	12	11	13
30	10	12	11	13
35	11	13	12	
40	11	14	13	

المصدر :

Mason (D.R.) ; Statistical Techniques in Business and Economics;  
Third Edition , 1974 , IRWIN , Homewood page (637).

## جدول (٧)

اختبار حسن المطابقة لميتين كبيرتين

### CRITICAL VALUES OF $D$ IN THE KOLMOGOROV-SMIRNOV TWO-SAMPLE TEST (large samples: two-tailed test)\*

Level of significance	Value of $D$ so large as to call for rejection of $H_0$ at the indicated level of significance, where $D = \text{maximum }  S_{n_1}(X) - S_{n_2}(X) $
.10	$1.22 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
.05	$1.36 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
.025	$1.48 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
.01	$1.63 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
.005	$1.73 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
.001	$1.95 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$

المصدر : نفس المصدر السابق صفحة (٣٥٨) .

# جدول (أ)

اختبار فروقات الرتب للأزواج المتقارنة

## WILCOXON T VALUES

Critical values of  $T$ , the Wilcoxon signed rank statistic, where  $T$  is the largest integer such that  $Pr(T \leq t/N) \leq \alpha$  the cumulative one-tail probability

	2 $\alpha$ .15	.10	.05	.04	.03	.02	.01
N	$\alpha$ .075	.050	.025	.020	.015	.010	.005
4	0						
5	1	0					
6	2	2	0	0			
7	4	3	2	1	0	0	
8	7	5	3	3	2	1	0
9	9	8	5	5	4	3	1
10	12	10	8	7	6	5	3
11	16	13	10	9	8	7	5
12	19	17	13	12	11	9	7
13	24	21	17	16	14	12	9
14	28	25	21	19	18	15	12
15	33	30	25	23	21	19	15
16	39	35	29	28	26	23	19
17	45	41	34	33	30	27	23
18	51	47	40	38	35	32	27
19	58	53	46	43	41	37	32
20	65	60	52	50	47	43	37
21	73	67	58	56	53	49	42
22	81	75	65	63	59	55	48
23	89	83	73	70	66	62	54
24	98	91	81	78	74	69	61
25	108	100	89	86	82	76	68
26	118	110	98	94	90	84	75
27	128	119	107	103	99	92	83
28	138	130	116	112	108	101	91
29	150	140	126	122	117	110	100
30	161	151	137	132	127	120	109
31	173	163	147	143	137	130	118
32	186	175	159	154	148	140	128
33	199	187	170	165	159	151	138
34	212	200	182	177	171	162	148
35	226	213	195	189	182	173	159
40	302	286	264	257	249	238	220
50	487	466	434	425	413	397	373
60	718	690	648	636	620	600	567
70	995	960	907	891	872	846	803
80	1318	1276	1211	1192	1168	1136	1086
90	1688	1638	1560	1537	1509	1471	1410
100	2105	2045	1955	1928	1894	1850	1779

المصدر :

Patchet (I.S.); Statistical Methods for Managers and ADMINST, VNR, NEWYORK , 1982 page (359).

# جدول (٩)

اختبار مجموع الرتب لميتين

## CRITICAL VALUES OF $U$ IN THE MANN-WHITNEY TEST

In the first table the entries are the critical values of  $U$  for a one-tailed test at 0.025 or for a two-tailed test at 0.05; in the second, for a one-tailed test at 0.05 or for a two-tailed test at 0.10.

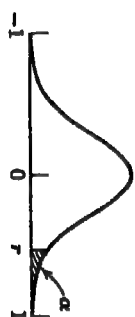
$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2									0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	3	2
3									1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8
4					0	1	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5				0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19
6			1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7			1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8		0	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9		0	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10		0	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11		0	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12		1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13		1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14		1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15		1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16		1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17		2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18		2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19		2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20		2	8	13	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2					0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
3			0	0	1	2	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5			0	1	2	4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23
6			0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30
7			0	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37
8			1	3	5	8	10	13	15	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44
9			1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51
10			1	4	7	11	14	17	20	24	27	31	34	37	41	44	48	51	54	58
11			1	5	8	12	16	19	23	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65
12			2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72
13			2	6	10	14	19	24	28	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80
14			2	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87
15			3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94
16			3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101
17			3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109
18			4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116
19			0	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116
20			0	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123

المصدر : نفس المصدر السابق صفحة (٣٥٧)



جدول رقم (١٠)  
قيم ر الحرجة لاختبار ز = صفراً



للاختبار في الجانبين،  $\alpha$  قيمتها ضعف القيمة السجولة عند  
عنوان العمود الذي له قيمة  $r$  الحرجة، لذلك لقيمة  $\alpha = 0.05$   
 $\alpha$  اختبار العمود  $0.025$

$\alpha$ $n$	0.05	0.025	0.005
5	.805	.878	.959
6	.729	.811	.917
7	.669	.754	.875
8	.621	.707	.834
9	.582	.666	.798
10	.549	.632	.765
11	.521	.602	.735
12	.497	.576	.708
13	.476	.553	.684
14	.457	.532	.661
15	.441	.514	.641
16	.426	.497	.623

$\alpha$ $n$	0.05	0.025	0.005
17	.412	.482	.606
18	.400	.468	.590
19	.389	.456	.575
20	.378	.444	.561
25	.337	.396	.505
30	.306	.361	.463
35	.283	.334	.430
40	.264	.312	.402
50	.235	.279	.361
60	.214	.254	.330
80	.185	.220	.286
100	.165	.196	.256

المصدر : نفس المصدر المذكور في الفصل السابق.

**جدول (١١)**  
جدول تحويل رالى (تحويل فسر لمعامل الارتباط)

r	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050	0.060	0.070	0.080	0.090
1	.100	.110	.121	.131	.141	.151	.161	.172	.182	.192
2	.203	.213	.224	.234	.245	.255	.266	.277	.288	.299
3	.310	.321	.332	.343	.354	.365	.377	.388	.400	.412
4	.424	.436	.448	.460	.472	.485	.497	.510	.523	.536
5	.549	.563	.576	.590	.604	.618	.633	.648	.662	.678
6	.693	.709	.725	.741	.758	.775	.793	.811	.829	.848
7	.867	.887	.908	.929	.950	.973	.996	1.020	1.045	1.071
8	1.099	1.127	1.157	1.188	1.221	1.256	1.293	1.333	1.376	1.422
r	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
90	1.472	1.478	1.483	1.488	1.494	1.499	1.505	1.510	1.516	1.522
91	1.528	1.533	1.539	1.545	1.551	1.557	1.564	1.570	1.576	1.583
92	1.589	1.596	1.602	1.609	1.616	1.623	1.630	1.637	1.644	1.651
93	1.658	1.666	1.673	1.681	1.689	1.697	1.705	1.713	1.721	1.730
94	1.738	1.747	1.756	1.764	1.774	1.783	1.792	1.802	1.812	1.822
95	1.832	1.842	1.853	1.863	1.874	1.886	1.897	1.909	1.921	1.933
96	1.946	1.959	1.972	1.986	2.000	2.014	2.029	2.044	2.060	2.076
97	2.092	2.109	2.127	2.146	2.165	2.185	2.205	2.227	2.249	2.273
98	2.298	2.323	2.351	2.380	2.410	2.443	2.477	2.515	2.555	2.599
99	2.646	2.700	2.759	2.826	2.903	2.994	3.106	3.250	3.453	3.800

المصدر : نفس المصدر المذكور، ص (٣٩٨).

## جدول (١٢)

### دوال لغة بيسك VS BASIC على جهاز IBM 3033

Function Name	Purpose	Category
ABS(X)	Absolute Value	Intrinsic
ACOS(X)	Arccosine	Intrinsic
AIDX(A) or AIDX(AS)	Ascending Index	Array
ANGLE(X,Y)	Angle	Intrinsic
ASIN(X)	Arcsine	Intrinsic
ASORT(A) or ASORT(AS)	Ascending Sort	Array
ATN(X)	Arctangent	Intrinsic
CEIL(X)	Ceiling	Intrinsic
CEN(X)	Fahrenheit to Centigrade	Intrinsic
CHR\$(M)	Character	Intrinsic
CNT	Count	Intrinsic
CODE	Code	Intrinsic
CON	Constant	Array
COS(X)	Cosine	Intrinsic
COSH(X)	Hyperbolic Cosine	Intrinsic
COT(X)	Cotangent	Intrinsic
CSC(X)	Cosecant	Intrinsic
DAT\$(M)	(Year/Month/Day)	Intrinsic
DATE	(Year, Number of Days)	Intrinsic
DATES	(Year/Month/Day)	Intrinsic
DBL(X)	Real Double	Intrinsic
DEC(X)	Decimal	Intrinsic
DEG(X)	Radians to Degrees	Intrinsic
DET(A)	Determinant	Intrinsic
DIDX(A) or DIDX(AS)	Descending Index	Array
DOT(A,B)	Dot Product	Intrinsic
DSORT(A) or DSORT(AS)	Descending Sort	Array
EPS	$\epsilon$	Intrinsic
ERR	Exception Code	Intrinsic
EXP(X)	Exponential Value	Intrinsic
FAH(X)	Centigrade to Fahrenheit	Intrinsic
FILE(M)	File Status	Intrinsic
FILENUM	File Number	Intrinsic
FILES(M)	File Name	Intrinsic
FP(X)	Fractional Part	Intrinsic
IDN	Identity	Array
IFIX(X)	Rounded Integer Value	Intrinsic
INF	Infinity	Intrinsic
INT(X)	Largest Integer	Intrinsic
INV(A)	Inverse	Array
IP(X)	Integer Part	Intrinsic
JDY[(C\$)]	Julian Date	Intrinsic
KEYNUM	Key Number	Intrinsic
KLN(M)	Key Length	Intrinsic

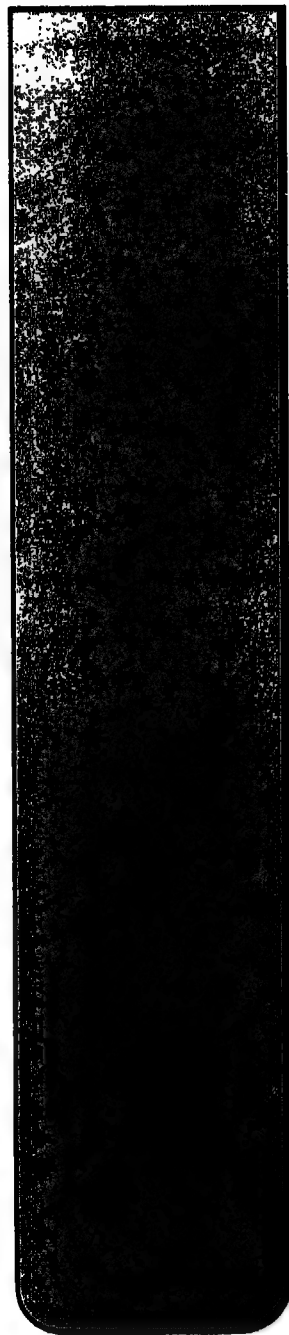
IBM 3270 Bashanced Functions TEXT Book

المصدر :

## تابع جدول (۱۷)

Function Name	Purpose	Category
KPS(M)	Key Position	Intrinsic
LEN(C\$)	Length	Intrinsic
LINE	Line Number	Intrinsic
LOG(X)	Natural Logarithm	Intrinsic
LOG2(X)	Base 2 Logarithm	Intrinsic
LOG10(X)	Common Logarithm	Intrinsic
LPADS(C\$,M)	Left Pad	Intrinsic
LTRMS(C\$)	Left Trim	Intrinsic
LWRMS(C\$)	Lower Case	Intrinsic
MAX(X,Y[,Z],...)	Maximum	Intrinsic
MIN(X,Y[,Z],...)	Minimum	Intrinsic
MOD(X,Y)	Modulo	Intrinsic
NUL\$	Null String	Array
ORD(C\$)	Ordinal Position	Intrinsic
PARMS	Parameter	Intrinsic
PI	$\pi$	Intrinsic
POS(C\$,D\$)	Position	Intrinsic
POS(C\$,D\$,M)	Position	Intrinsic
PRD(A)	Array Product	Intrinsic
RAD(X)	Degrees to Radians	Intrinsic
REAL(X)	Real	Intrinsic
REC(M)	Record Number	Intrinsic
REM(X,Y)	Remainder	Intrinsic
RLN(M)	Record Length	Intrinsic
RND[(X)]	Random	Intrinsic
ROUND(X,M)	Round	Intrinsic
RPADS(C\$,M)	Right Pad	Intrinsic
RPTS(C\$,M)	Repeat	Intrinsic
RTRMS(C\$)	Right Trim	Intrinsic
SEC(X)	Secant	Intrinsic
SGN(X)	Sign	Intrinsic
SIN(X)	Sine	Intrinsic
SINH(X)	Hyperbolic Sine	Intrinsic
SIZE(A) or SIZE(AS)	Array Size	Intrinsic
SIZE(A,M) or SIZE(AS,M)	Dimension Size	Intrinsic
SNG(X)	Real Single	Intrinsic
SQR(X)	Square Root	Intrinsic
SRCH(A,X[,M])	Numeric Search	Intrinsic
SRCH(AS,C\$[,M])	Character Search	Intrinsic
SREPS(C\$,M,D\$,E\$)	Search and Replace	Intrinsic
STR\$(X)	String Conversion	Intrinsic
SUM(A)	Sum	Intrinsic
TAN(X)	Tangent	Intrinsic
TANH(X)	Hyperbolic Tangent	Intrinsic
TIME	Time in Seconds	Intrinsic
TIMES	Time (HH:MM:SS)	Intrinsic
TRN(A) or TRN(AS)	Transpose	Array
TRUNCATE(X,M)	Truncate	Intrinsic
UDIM(A,M) or UDIM(AS,M)	Upper Dimension	Intrinsic

- 
- ١ ■ المراجع العربية
  - ٢ ■ التقارير العربية
  - ٣ ■ المراجع الأجنبية
- 





## ١ = المراجع العربية:

- ١ - بول ج ٥ هويل : المبادئ الأولية في الإحصاء - ترجمة د ٥ بدرية عبدالوهاب ود ٥ محمد الشربيني - الطبعة الرابعة - جون وايل وأبنائه - ١٩٨٤ م (نيويورك) .
- ٢ - د ٥ علي عبدالحفيظ : دور وحدات التخطيط في الأجهزة الحكومية في المملكة العربية السعودية - معهد الإدارة العامة - الرياض - ١٤٠٤ هـ .
- ٣ - د ٥ فاروق عبدالمعظم أحمد : مقدمة الطرق الإحصائية - دار المطبوعات الجامعية - الاسكندرية - ١٩٧٩ .
- ٤ - محمد صبحي أبو صالح وعدنان محمد عوض : مقدمة في الإحصاء ، جون وايل وأبنائه - نيويورك - ١٩٨٣ .
- ٥ - د ٥ محمد مظلوم حمدي : طرق الإحصاء - دار المعارف بمصر - الطبعة الرابعة - مصر - ١٩٦١ .

## ٢ = التقارير العربية:

- ١ - بحث حوادث السيارات والأضرار الصحية الناتجة عنها - الادارة العامة للمرور - الرياض ١٩٨١ .
- ٢ - النشرة الاحصائية السنوية لحوادث المرور - الادارة العامة للمرور - الرياض - ١٤٠٢ هـ .
- ٣ - مؤسسة النقد السعودي - التقرير السنوي لعام ١٤٠١ هـ - الرياض ١٤٠٢ هـ .
- ٤ - مؤسسة النقد السعودي - التقرير السنوي لعام ١٤٠٤ هـ - الرياض ١٤٠٥ هـ .

## ٣ = المراجع الأجنبية:

- 1 - Achen (C. H.); *Interpreting and using Regression*, Sage publications, London, 1982.
- 2 - Afifi (A.A.) and Azen (S.P.); *Statistical Analysis, A computer Approach*, Academic press Inc., New York, 1972.
- 3 - Barrie (W.G.); *Intermediate Statistical Methods*, Chapman and Hall, London, 1981.
- 4 - Clark (F.J.); *Mathematics for Data Processing*, Reston Publishing Co., 1983.
- 5 - Dixon (W.J.) and Massey (F.J.); *Introduction to Statistical Analysis*, Fourth edition, Mc-Graw. Hill, New York, 1983.
- 6 - Dormey (R.G.); *How to Solve it by Computer*, Prentice-Hall, 1983.
- 7 - Draper (N.R.) and Smith (H.); *Applied Regression Analysis*, John wiley, New York, 1966.

- 
- 8 – Duncan (A.J.); **Quality Control and Industrial Statistics**, Irwin, London, 1973.
  - 9 – Fadli (H.Z.); **Applied Business Statistics**, Addison – Wesley, Reading, U.S.A, 1984.
  - 10 – Freund (J.E.); **Mathematical Statistics**, Hall International, London, fourth edition, 1972.
  - 11 – Freuw (R.J.); **Regression Methods**, Marcel Dekker, New York, 1980.
  - 12 – Horowitz (E.) and Sahni (S.); **Fundamentals of Computer Algorithms**, Pitman Pub. Co., 1978.
  - 13 – Jones (R.M.); **Structured Basic**, Allyn and Bacon, 1985.
  - 14 – Kazemir (L.J.); **Statistical Analysis for Business and Economics**, Mc-Graw – Hill, New York; Third edition, 1978.
  - 15 – Kendall (M.) and Stuart (A.); **Advanced Theory of Statistics**, Vol. 2, Griffin; London; Third edition, 1961.
  - 16 – Kitchen (A.); **Basic By Decision**, Prentice-Hall, 1983.
  - 17 – Larson (H.J.); **Introduction To Probability Theory and Statistical Inference**, John Wiley, New York, Second edition, 1974.
  - 18 – Lien (D.A.); **THE Basic Handbook**, Compuso Publishing, 1981.
  - 19 – Lipschutz (S.); **Essential computer Mathematics**, Mc-Graw Hall, Company, 1982.
  - 20 – Mason (R.D.); **Statistical Techniques in Businen and Economics**, Richard D. Irwin, Illinois, Third edition, 1974.
  - 21 – Meler (K.J.) and Brudney (J.L.); **Applied Statistics for public Administration**, Duxbury Press, U.S.A., 1981.
  - 22 – Michael (S. Lewis-Beck); **Applied Regression, an Introduction**, Sage University Paper 22, London, Fifth Printing, 1983.
  - 23 – Meyer (P.L.); **Introduction to Probability and Statistical Applications**, Addison-Wesley, California, Second edition, 1972.
  - 24 – Patchet (I.S.); **Statistical Methods for Managers and Administrators**, Van Nostr. Reinhold Company, New York, 1980.
  - 25 – Poole (C.); Borche (M.) and Castle (D.); **Some Common Basic Programs**, McGraw-Hill, 1981.
  - 26 – Roberts (H.V.) and Robert (F.L.); **An Introduction to data Analysis and Regression**, McGraw-Hill, New York, 1982.
  - 27 – Ronald (S.K.) and Bryant (J.); **Applied Statistics Using The Computer**, Alfred Pub. Co., California, 1982.
  - 28 – Snedecor (G.W.) and Cochran (W.); **Statistical Methods**, Iowa State University Press, IWA, Sixth Edition, 7th Printing, 1974.
  - 29 – Yeomans (P.S.); **Applied Statistics for Social Scientist**, Volume two, Penguin Books, Middlesex, England.
  - 30 – Waller (R. A.); **Statistics: An Intoduction to Numerical Reasoning**, Holland Inc; San Francisco, 1979.
-



## المؤلفان في سطور

### ● الأستاذ محمد عثمان البشير.

- من مواليد الدويم - السودان.
- حاصل على درجة الماجستير في مجال الحاسب الآلى من معهد شمال لندن التكنولوجى في عام ١٩٧٨.
- يعمل حاليًا رئيسًا لقسم الحاسب الآلى بفرع المعهد بالغربية.

### ● من خبراته العملية :

- محاضر ومحلل نظم / مبرمج مركز الحاسب الآلى، جامعة الخرطوم، محاضر ومحلل نظم / مبرمج بمعهد الإدارة العامة، رئيس قسم الحاسب الآلى بفرع معهد الإدارة العامة بالغربية.

### ● من أهم أعماله العلمية المنشورة :

- مقدمة في الحاسب الآلى (كتاب).
- الكمبيوتر الشخصى ما هو؟ (مقال نشر في مجلة الإدارة العامة).

### ● الأستاذ كرم الله على عبدالرحمن.

- من مواليد السودان.
- حصل على درجة الماجستير في الإحصاء (إحصاء تطبيقي) من جامعة ساوثهامبتون بإنجلترا عام ١٩٧٧م، ويعمل حاليًا محاضرًا بمعهد الإدارة العامة.

### ● من خبراته العملية :

- إخصائى بقسم الاقتصاد والإحصاء الزراعى بالسودان، باحث بالمجلس القومى للبحوث بالسودان، محاضر بجامعة الخرطوم، وأخيرًا محاضر بمعهد الإدارة العامة.

### ● من أهم أعماله العلمية المنشورة :

- The Robustness of Trimmed Estimators in Linear Regression (بحث).
- حوادث المرور (بحث).
- الرغبة في التسرب لدى خريجي البرامج الإعدادية (بحث).
- عدد من المقالات في مجال الإحصاء نشرت بمجلة الإدارة العامة.

---

طبع في مطابع معهد الإدارة العامة - الرياض

---





طبع بمطابع معهد الإدارة العامة ١٤١٥ هـ

٣٦ ريالاً